PROBLEMI E MATEMATICA [1] di Umberto Tenuta (utenuta@alice.it)

Si apprende meglio attraverso la soluzione di **problemi** *(problem solving): come scrive il Ferrari per la Matematica, ma l'indicazione vale ovviamente per tutte le altre discipline,* ***<<invece di iniziare la trattazione di un argomento con una serie di definizioni, di teoremi e di corollari, si parte da problemi la cui matematizzazione e risoluzione porta alla scoperta di un concetto o allo sviluppo di una teoria>>*** [2]

I PROGRAMMI DIDATTICI DEL 1985 PER LA SCUOLA PRIMARIA (**PD85**), che, anche se non più in vigore, restano un documento pedagogico estremamente ancora valido presentavano i seguenti obiettivi relativi al tema dei **PROBLEMI**:

P1 — Tradurre problemi elementari espressi con parole in rappresentazioni matematiche, scegliendo le operazioni adatte; quindi trovare le soluzioni e interpretare correttamente i risultati; inversamente, attribuire un significato a rappresentazioni matematiche date;

***P2— Individuare situazioni problematiche in ambiti di esperienza e di studio e formularne e giustificarne ipotesi di risoluzione con l'uso di appropriati strumenti matematici, sia aritmetici si di altro tipo*;**

P3—risolvere problemi aventi procedimento e soluzione unici e problemi che offrono possibilità di risposte diverse, ma ugualmente accettabili;

P4 — Individuare la carenza di dati essenziali per la risoluzione di problemi ed eventualmente integrarli; riconoscere in un problema la presenza di dati sovrabbondanti, oppure contraddittori con conseguente impossibilità di risolverlo.

Al riguardo, opportunamente precisavano:

<<Il pensiero matematico è caratterizzato dalla attività di risoluzione di problemi e ciò è in sintonia con la propensione del fanciullo a porre domande e a cercare risposte.

*<<**Di conseguenza le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo e che offrano anche l'opportunità di accertare quali apprendimenti matematici egli ha in precedenza realizzato, quali strumenti e quali strategie risolutive utilizza e quali sono le difficoltà che incontra.***

Occorre evitare, peraltro, di procedere in modo episodico e non ordinato e tendere invece ad una progressiva organizzazione delle conoscenze>>.

La soluzione dei problemi viene di solito considerata un compito meramente scolastico, senza tener presente che essa costituisce un'attività, anche di natura non matematica, che ha inizio sin dal primo attivarsi dell'intelligenza senso-motoria del bambino e che la famiglia e la scuola materna in particolare hanno il compito di assecondare, promuovendo lo sviluppo degli atteggiamenti problematici (*<<propensione del fanciullo a porre domande>>)* e l'acquisizione delle relative abilità *(<<cercare risposte*>>), anche se opportunamente muovendo dal movimento, dall'azione concreta, dalla manipolazione di oggetti ecc.

Se è vero che *<<l'educazione dell'alunno non comincia nella scuola e non si esaurisce in essa>>* (PROGRAMMI DIDATTICI DEL 1955) e che la scuola è chiamata a favorire *<<l'interazione formativa con la famiglia - sede primaria dell'educazione del fanciullo - e con la più vasta comunità sociale>>*; che *<<in questa prospettiva un ruolo fondamentale compete anche alla scuola materna>>* [3], allora riveste fondamentale importanza quanto vien fatto prima dell'inizio della scuola dell'obbligo anche in ordine alla risoluzione

---

[1] Liberamente tratto, con modifiche, da TENUTA U., *Itinerari di Logica Probabilità Statistica Informatica*, LA SCUOLA, BRESCIA, 1992, ill., pp. 344.
Per un'essenziale bibliografia sull'Educazione matematica, tra le altre opere, cfr.: ENGELMANN et alii, *L'educazione dell'intelligenza nella scuola materna*, LA Nuova Italia, Firenze, 1970; E. SHARP, *Pensare a tre anni - Quaranta giochi matematici per i vostri bambini*, Armando, Roma, 1982; M. L. CALDELLl, B. D'AMoRE, *La matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola elementare*, La Nuova Italia, 1986; M. L. CALDELLl, B. D'AMORE, *Il bambino matematizza il mondo*, La Nuova Italia, Firenze, 1984; M. L. CALDELLl, *Operazioni protomatematiche*, N. Milano, Bologna, 1981; P. PASOTTO, *Informatica per imparare _ Primi passi nel linguaggio LOGO*, N. Milano, Bologna, 1988; S. BRAY, M. CLAUSARD, *Iniziazione matematica nella scuola materna*, O. S., Firenze, 1969.

[2] FERRARI M.,*L'educazione matematica dai 13 ai 18 anni*, in *L'Educazione Matematica*, C.R.S.E.M., CAGLIARI, Suppl. I, 1980, p. 45

[3] Oggi la L. 53/2003 e la L. 30/2000 parlano di <<***cooperazione tra scuola e famiglia***>>.

dei problemi, nella prospettiva generale della formazione del pensiero, alla quale notevolmente concorre l'educazione matematica.

Pertanto, in questa sede ci limitiamo a prendere in considerazione l'attività scolastica di **risoluzionè di problemi** che costituisce l'aspetto essenziale dell'educazione matematica intesa nella sua preminente funzione di <<***formazione del pensiero***>>.

Anche secondo le indicazioni del Claparède relative alle fasi del pensiero, l'itinerario didattico per la soluzione dei problemi matematici dovrebbe articolarsi in tre momenti fondamentali:

presa di coscienza del problema

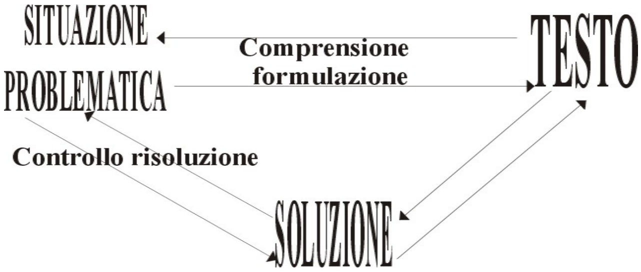
↓

scoperta della soluzione

↓

verifica

Questo itinerario si ritrova sufficientemente delineato nei primi due obiettivi (**P1** e **P 2**) del tema <<**I problemi**>> dei PD85, dei quali le attività previste dai successivi temi **P3** e **P4** costituiscono soltanto opportune integrazioni.



In merito, è opportuno precisare che si tratta di un itinerario di massima che può essere, non solo integrato ed arricchito, ma anche non attuato interamente: nel senso che si può ritenere didatticamente opportuno soffermarsi di più su alcune fasi o trascurarne altre.

Inoltre è da tenere presente che la distinzione dei diversi momenti ha un significato logico più che cronologico e psicologico, in quanto l'effettivo processo di soluzione dei problemi si presenta estremamente fluido e si fonda su un'estrema mobilità del pensiero che non rimane ─non deve rimanere─ mai bloccato su una singola fase, ma passa continuamente dall'una all'altra: nel prendere in considerazione il quesito si sposta sui dati, ma questi rapporta al quesito ed agli strumenti risolutivi di cui dispone ecc.

Anche distinguendo le varie fasi, alle quali si deve dedicare specifica attenzione, è però didatticamente opportuno stimolare gli alunni a non procedere meccanicamente da una fase a quella successiva, ma a passare agevolmente dall'una all'altra in senso progressivo e regressivo, favorendo così la mobilità del pensiero.

In merito a questa si può tener presente il seguente modello elaborato dal Boero[4], nel quale le frecce indicano le attività che l'alunno è chiamato ad effettuare nella soluzione di problemi.

INDIVIDUARE SITUAZIONI PROBLEMATICHE IN AMBITI DI ESPERIENZE E DI STUDIO

Come afferma il Kanizsa, <<*un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso. L'esistenza di una motivazione e la presenza, nella situazione problemica, di un impedimento che non permette l'azione diretta creano uno stato di squilibrio e di tensione nel campo cognitivo dell'individuo. Per ristabilire l'equilibrio, cioè per cercare di risolvere il problema, egli può andare a tentoni, provare a caso varie forme di comportamento, e trovare così, appunto a caso, la via o il modo per passare dalla situazione insoddisfacente in cui si trova a quella alla quale tende. Invece di affidarsi in modo cieco ad una serie di tentativi casuali, l'individuo può mettersi a pensare e pervenire alla soluzione attraverso un comportamento intelligente*>>[5].

Pertanto, i problemi nascono sempre da un bisogno, da un interesse, da una domanda, da un interrogativo. In tal senso, essi non sono mai oggettivi, non esistono indipendentemente dai soggetti che li vivono , li avvertono, li sentono come tali e cercano di risolverli. I problemi non sono nelle cose, negli oggetti, nelle situazioni, pronti ad essere scoperti, ad essere visti, ad essere <<*individuati*>>, ma esistono quando nascono negli individui[6], quando i bisogni, i desideri, le aspettative urtano contro la realtà[7]. Allora i problemi nascono, coinvolgono, esplodono e motivano, impegnano il soggetto a risolverli.

---

[4] BOERO, *Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare*, in "**L'insegnamento della matematica e delle Scienze integrate"**, Paderno del Grappa, 1986, IX, p. 55.

[5] KANIZSA G., *Il <<problem-solving>> nella psicologia della gestalt*, in MOSCONI G., D'URSO V., *La soluzione di problemi. Problem-solving*, Giunti-Barbèra, Firenze, 1973, p. 35.

[6] 4 Come afferma il Kanizsa, <<*Si è sempre assunta l'esistenza del problema come un dato, come un fatto esistente per sè e non richiedente ulteriore comprensione ... Ma questa assunzione del problema come dato dal quale partire è arbitraria: il problema non è un dato, un fatto naturale, ma è ... un prodotto psicologico. Si converrà senza difficoltà che esiste un problema solo là e quando vi è una mente che vive una certa situazione come problema. Diciamo di più, e più esattamente: vi è problema solo quan-*

<<*Individuare situazioni problematiche*>>, perciò, non significa andare alla ricognizione, alla ricerca, alla scoperta dei problemi negli <<*ambiti di esperienza e di studio*>>, bensì assumere un atteggiamento inquisitivo, interrogativo, problematico dinanzi alla realtà: i problemi uno non li trova dinanzi a sé, ma li "individua", nel senso che egli se li pone, li vede, li crea.

In tale prospettiva, gli insegnanti debbono favorire la naturale <<*propensione del fanciullo a porre domande e a cercare risposte*>> cui fanno riferimento i PD1985 , e che la famiglia e la scuola dell'infanzia hanno il compito, non solo di non spegnere, come alcuni temono, ma anche di stimolare, alimentare, coltivare. Anche se la curiosità è innata nell'uomo[8], non si può non prendere atto che la famiglia e la scuola tendono ─e molto spesso riescono─ a spegnerla, per cui Einstein fondatamente poteva affermare che la cosa che maggiormente lo meravigliava era il fatto di aver potuto conservare l'amore della matenatica malgrado tutto l'insegnamento che ne aveva ricevuto nei vari ordini di scuola.

Se è vero, come afferma il Titchmarsh che <<*i matematici puri si occupano di matematica per una soddisfazione estetica ... perché per loro è un piacere, come per altri, per esempio, arrampicarsi in cima alle monta*gne ... >>[9] , i fanciulli, che agli scienziati ─e quindi ai matematici─ assomigliano, se opportunamente stimolati ed educati, possono dar libero corso alla loro curiosità, soprattutto formulando le domande che costituiscono il punto di partenza per gli apprendimenti matematici. A tal fine fondamentale importanza assume la realizzazione di un ambiente educativo e di apprendimento, costituito non solo da laboratori forniti di adeguati materiali didattici comuni e strutturati, ma anche da una particolare atmosfera scolastica e soprattutto dall'atteggiamento disinibito, aperto alla curiosità, problematizzante, indagatore, che l'insegnante riesce a coltivare negli alunni[10]. In tale prospettiva, un ruolo fondamentale rivestono anche le situazioni di gioco: il gioco ha occupato sempre un posto importante nell'attività dei matematici. Non solo dal gioco sono nate alcune scienze ─ad esempio, il ***Calcolo delle probabilità***─, ma spesso la stessa attività matematica si configura come un gioco, un'attività fine a se stessa, che nasce dalla curiosità umana, dal bisogno di indagare, di conoscere, di sperimentare, e che nello stesso tempo assorbe, impegna e non dà pace fino a quando non si è pervenuti alla soluzione cercata.

I PD1985 fanno esplicito riferimento al gioco (<< ... *attraverso attività e giochi scelti fra quelli tradizionali presenti negli ambienti di vita del fanciullo ... un ruolo importante hanno le [situazioni] più naturali e spontanee: quelle di gioco ... Fra i giochi si possono comprendere sia quelli spontanei o appresi dal fanciullo nel suo ambiente cultura, sia quelli più specificamente indirizzati al conseguimento di particolari abilità matematiche*>>).

Significativamente è stata coniata, per denotare un siffatto ambiente scolastico di apprendimento matematico, l'espressione "***Matelandia***"[11], quasi in contrapposizione all'atmosfera greve, triste e penosa che comunemente si associa all'attività matematica.

Spetta naturalmente all'insegnante, non solo promuovere tale atmosfera, favorendo <<*la tendenza a porre proprie domande, o a coglierle nel discorso degli altri come motivazione all'osservazione e alla scoperta*>>, ma anche organizzarla creativamente, di volta in volta, in vista degli specifici obiettivi da conseguire.

In effetti, quando l'insegnante coniuga una profonda conoscenza dei concetti da fare apprendere con una notevole dose di competenza e di creatività didattica, riesce quasi sempre ad organizzare situazioni problematiche ─anche in forma ludica─ funzionali al conseguimento dei singoli obiettivi aritmetici, geometrici, logici ecc.

Solo la mancanza di fantasia rende stereotipate le situazioni di apprendimento, legandole pedissequamente alle attività proposte dai libri di testo e dalle guide didattiche che, a volte, anziché stimolare la creatività, finiscono con l'incoraggiare la pigrizia dell'insegnante ed il tedio degli alunni.

In tale compito, l'insegnante può anche fare riferimento, a titolo orientativo, a numerose esperienze estremamente creative di ìnsegnamento-apprendimento della matematica di cui spesso vengono date adeguate

---

do la mente crea o determina il problema: vi è problema solo nella dimensione psicologica, non in quella naturale, o oggettiva>> (G. KANIZSA,
Il <<*problem-solving…*>>, cit, p. 31)

[7] Cfr. FRANCHI G., *La matematica nella scuola elementare*, La Scuola, Brescia, 1987, p. 27.

[8] HODGKIN R.A., *La curiosità innata - Nuove prospettive dell'educazione*, Armando, Roma, 1978

[9] TITCHMARSH E. C., *Introduzione alla matematica*, Garzanti, 1963, pp. 179-180.

[10] TENUTA U., , L'attività educativa e didattica nella scuola elementare – Come organizzare l'ambiente educativo e di apprendimento, La Scuola, Brescia, 1989.

[11] Coniata dal Prof. Arzarello dell'Università di Torino.

documentazioni[12], oltre che al patrimonio di giochi tradizionali dei fanciulli di ogni tempo e di ogni luogo (<<*giochi ... spontanei o appresi dal fanciullo nel suo ambiente culturale*>>)[13]· .

Tuttavia, le situazioni problematiche più idonee ai fini dell' apprendimento matematico sono quelle create dall'insegnante facendo leva sulla naturale curiosità dei fanciulli. Poiché ogni problema nasce da un bisogno, e il bisogno più umano è quello di conoscere, soprattutto su questo si deve fare affidamento per creare le condizioni che rendano possibili tutti gli apprendimenti e, in particolare, un apprendimento matematico che sia, non solo motivato, ma anche organico, perché, come avvertono i PD85, <<*occorre evitare ... di procedere in modo episodico e non ordinato e tendere invece ad una progressiva organizzazione delle conoscenze*>>[14].

Seguendo una siffatta impostazione, fondata soprattutto su motivazioni intrinseche, quale la ***curiosità***[15] —ma anche senza trascurare altre motivazioni intrinseche, quali il ***desiderio di competenza, il bisogno di identificazione e di reciprocanza*** cui fa riferimento il Bruner[16]— si creano le condizioni per un'attività di apprendimento che, evitando di far riferimento a motivazioni individuali episodiche, occasionali, frammentarie, risulti organica e funzionale, cioè tale da consentire l'effettivo perseguimento dei previsti obiettivi matematici.

In ordine all'impostazione organica dell'attività di soluzione dei problemi, si pone anche l'interrogativo se i problemi possano essere imposti anche dai docenti o debbano essere individuati sempre dagli alunni.

In merito, occorre tener presente la distinzione tra i problemi finalizzati all'acquisizione ed al consolidamento dei concetti matematici ed i problemi più direttamente indirizzati alla formazione del pensiero. Sembrerebbe che i primi, dovendo risultare più organici e sistematici, debbano essere posti dai docenti, mentre i secondi potrebbero più liberamente essere individuati dagli stessi alunni. Tuttavia, tenendo presente che i problemi debbono sempre rispecchiare precise domande degli alunni, la distinzione tra problemi proposti dall'insegnante e problemi individuati dagli alunni risulta irrilevante e addirittura finisce col non porsi: il compito degli insegnanti non è tanto quello di proporre i problemi quanto quello di farli nascere negli alunni, di farli scaturire ed avvertire, per cui si può dire che l'insegnante non pone i problemi, ma li suscita. In un'impostazione metodologica prevalentemente fondata sui processi costruttivi dell'apprendimento, le funzioni dei docenti consistono essenzialmente nel promuovere l'insorgere di problemi (*problem provoking*!) e nel guidare gli alunni nei processi di costruzione dei concetti.

Pertanto, gli insegnanti debbono favorire negli alunni lo sviluppo dell'attitudine a problematizzare le situazioni, a porsi interrogativi, a dare via libera alla loro curiosità, alla loro attività inquisitiva, esplorativa, indagatrice relativamente a tutti gli aspetti della realtà (storici, geografici, linguistici, scientifici, matematici ...), domandandosi perché il sole sorge, dove si trova Singapore, chi era Napoleone, che cosa è il carbone, come nascono le piante, perché le parole telefono/televisione/telegramma hanno la parte iniziale comune ecc.

Muovendosi in questa direzione relativamente ad ogni campo dell'attività didattica, si creano le condizioni perché anche le attività matematiche non siano svolte in astratto, su contenuti "fittizi".

L'alunno della scuola elementare si trova nella fase del pensiero operatorio concreto e, quindi, non è ancora capace di affrontare situazioni problematiche ipotetiche, quali molto spesso sono quelle proposte nei libri di testo o nelle guide didattiche. Questo significa che debbono essere banditi i problemi che non siano collegabili alla realtà concreta nella quale i fanciulli vivono.

Pur non essendo da escludere la possibilità che i problemi possano essere "creati" dagli alunni o dagli insegnanti, è preferibile che essi si riferiscano alle concrete esperienze scolastiche ed extrascolastiche degli alunni: queste possono costituire l'ambiente da cui i problemi possono scaturire, solo che si faccia leva sulla

---

[12] Cfr. le riviste "*L'educazione matematica*". Cagliari e "*L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*", Paderno del Grappa; ed inoltre: COLOMBO BOZZOLO C., *I nuovi programmi di matematica per la scuola elementare - Problemi di aritmetica, in "L'Insegnamento della matematica ...*, cit., 1985. III, pp. 31ss.e V, pp. 27 ss.: D'AMORE B., Una *mostra di matematica*, Giunti-Lisciani, Firenze, 1987.

[13] GARDINER M., *Enigmi e giochi matematici*, Sansoni, Firenze, 1968; WARWICK W., *La delizia del matematico,* Vallardi, Milano, 1952; D' AMORE B., *Giochi e matematica*, Cappelli, Bologna, 1986; PEANO G., *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, Sansoni, Firenze, 1983; PERES. *Giochi matematici,* Editori Riuniti. Roma. 1986; VARGA T., *Giochiamo alla Matematica*, O. S ., Firenze, 1972; Z. P. DIENES, *La matematica appresa attraverso i sensi*, O. S.,:1975; Z. P. DIENES. E. W. GOLDINO. *Logica e giuochi logici; Insiemi, numeri e potenze. Esplorazione dello spazio e pratica della misura*, O. S., Firenze, 1969, 3 voll.

[14] In sintonia col pensiero del Bruner, il Pescarini scrive che <<*l'attività matematica si motiva ... da sé stessa e cioè in modo intrinseco ... Fuori da una tale visione del problema a noi pare veramente disperante cercare di interessare i fanciulli... alla matematica*>> (PESCARINI A., . *Finalità dell'insegnamento matematico nella scuola elementare*, in "Scuola di base", 1970. V. p. 9).

[15] HODGKIN R.A., *La curiosità innata - Nuove prospettive dell'educazione*, Armando, Roma, 1978

[16] BRUNER J.S., *Verso una teoria dell'istruzione*, Armando, Roma, 1967, pp. 177-198. Vedi nella rubrica DOCUMENTI E NORME della RIVISTA DIGITALE DELLA DIDATTICA(www.rivistadidattica.com), BRUNER, *La volontà di apprendere*.

naturale curiosità, cioè sulla <<*propensione del fanciullo a porre domande ed a trovare risposte*>> cui fanno riferimento i PD85.

Nella realtà concreta della vita dei fanciulli possono essere "viste" infinite situazioni problematiche. Ad esempio, in una classe, è possibile voler sapere, per ragioni diverse —per semplice curiosità— qual è, in anni e mesi, l'età dei singoli alunni; quale l'età media degli alunni; quale la spesa mensile per la cancelleria; quali i generi di lettura e quali le relative frequenze; quante le assenze dei singoli alunni e della classe ...

Sviluppare negli alunni un simile atteggiamento problematizzante è l'obiettivo fondamentale che ogni insegnante deve proporsi. La scuola deve coltivare, anziché spegnere, la naturale .<<*propensione ... a porre domande ed a cercare risposte*>> che è propria del filosofo, del matematico e, come prevedono atto i PD85, dei fanciulli.

Come afferma il Laeng, <<*educare alla domanda vuol dire educare all'intelligenza: educare allo spirito di inesausta domanda, anche in seno alla "conflittuale, levigata, razionalmente democratica nonlibertà" della civiltà tecnologica (H. Marcuse), vuol dire educare alla filosofia, che riconosce in se stessa l'eros figlio di povertà e d'acquisto: fame e sete di verità e sforzo per divenirne eredi*>>![17].

Se, come affermano i PD85, <<*le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete che scaturiscono da esperienze reali del fanciullo*>>, allora occorre rivedere una certa prassi didattica fondata quasi esclusivamente su problemi "fittizi", artificiosi, irreali, preconfezionati nei libri di testo, od in guide e manuali più o meno "firmati", e posti —in verità, imposti— agli alunni.

L'alunno della scuola elementare si trova nella fase del pensiero operatorio concreto e, quindi, non è ancora capace di affrontare situazioni problematiche ipotetiche, quali molto spesso sono quelle proposte nei libri di testo o nelle guide didattiche. Questo significa che debbono essere banditi i problemi che non siano collegabili alla realtà concreta nella quale i fanciulli vivono.

Pur non essendo da escludere la possibilità che i problemi possano essere "creati" dagli alunni o dagli insegnanti, è preferibile che essi si riferiscano alle concrete esperienze scolastiche ed extrascolastiche degli alunni: queste possono costituire l'ambiente da cui i problemi possono scaturire, solo che si faccia leva sulla naturale curiosità, cioè sulla <<*propensione del fanciullo a porre domande ed a trovare risposte*>> cui fanno riferimento i PD85.

Nella realtà concreta della vita dei fanciulli possono essere "viste" infinite situazioni problematiche. Ad esempio, in una classe, è possibile voler sapere, per ragioni diverse —per semplice curiosità— qual è, in anni e mesi, l'età dei singoli alunni; quale l'età media degli alunni; quale la spesa mensile per la cancelleria; quali i generi di lettura e quali le relative frequenze; quante le assenze dei singoli alunni e della classe ...

Sviluppare negli alunni un simile atteggiamento problematizzante è l'obiettivo fondamentale che ogni insegnante deve proporsi. La scuola deve coltivare, anziché spegnere, la naturale .<<*propensione ... a porre domande ed a cercare risposte*>> che è propria del filosofo, del matematico e, come prendono atto i PD85, anche del fanciullo.

Tuttavia, ciò non significa che i problemi debbano riferirsi solo alla vita pratica. La "**realtà**" del fanciullo è anche quella dell'immaginazione e della fantasia. Anche da queste i problemi possono nascere, purché però siano tradotti in esperienza "**concreta**", vissuta materialmente dagli alunni.

Ad esempio, un problema può riferirsi alle possibili combinazioni delle due gonne e delle due magliette sia dell'alunna Maria che la sua bambola Barby: sono tutt'e due realtà concretamente vissute da Maria, se essa effettua materialmente tali combinazioni, poiché non è certamente possibile separare la "realtà" della vita dalla "realtà" del gioco.

In merito si tenga presente che un ruolo determinante nei procedimenti didattici è quello svolto dalle simulazioni[18].

In effetti, più che la realtà, ciò che soprattutto ba importanza è la concretezza, cioè la manipolazione, il movimento, l'azione materiale. Almeno all'inizio del processo di apprendimento i fanciulli debbono poter sperimentare le situazioni, compiendo effettivamente le operazioni previste.

A livello di Scuola elementare, l'attività matematica ha come obiettivo fondamentale la costruzione di <<***una larga base esperienziale di fatti, fenomeni, situazioni e processi**, sulla quale poi sviluppare le più elementari formalizzazioni del pensiero matematico*>>. Questa esperienza è la base di ogni processo di formazione culturale, quale che ne sia il campo, dalla lingua alla matematica, alla storia ...

---

[17] LAENG M., *L'educazione nella civiltà tecnologica*, Armando, Roma, 1970, p. 104

[18] In merito cfr.: AA.VV., *I giochi di simulazione nella scuola*, Zanichelli, Bologna, 1987; TAYLOR J. L., WALFORD R., *I giochi di simulazione per l'addestramento e l'apprendimento*, Mondadori, Milano, 1979; BAUDET A. (a cura di), *Giocare per capire*, La Nuova Italia, Firenze, 1978.

Perciò, non si insisterà mai abbastanza sull'esigenza che nell'apprendimento matematico i fanciulli realizzino questa <<*larga base esperienziale*>>, attraverso il movimento, la manipolazione di oggetti concreli, l'azione materiale. È scontato che poi da questa esperienza concreta essi debbano passare alla rappresentazione iconica e simbolica, all'astrazione ed alla formalizzazione, nel senso che fare matematica significa fare astrazioni e quindi è importante che il fanciullo <<***si distacchi, ad un certo punto, dalla manipolazione dei materiali stessi per arrivare ad utilizzare soltanto le relative rappresentazioni mentali***>> e <<*le più elementari formalizzazioni del pensiero matematico*>>: queste, però, non possono costituire un punto di partenza, ma una meta, il risultato del <<***passaggio dall'esperienza alla rappresentazione e quindi alla formalizzazione***>>.

Al riguardo, Piaget iaget afferma che ***<<L'intelligenza è un sistema di operazioni... L'operazione non è altro che azione: un'azione reale, ma interiorizzata, divenuta reversibile. Perché il bambino giunga a combinare delle operazioni, si tratti di operazioni numeriche o di operazioni spaziali, è necessario che abbia manipolato, è necessario che abbia agito, sperimentato non solo su disegni ma su un materiale reale, su oggetti fisici>>***[19].

Così il Bruner sintetizza questo itinerario: ***<<All'inizio il mondo del fanciullo è noto a lui principalmente attraverso le azioni abituali, che egli usa, per affrontarlo. Successivamente si aggiunge una tecnica di rappresentazione attraverso l'immagine, che è relativamente libera dall'azione. Gradualmente si aggiunge un nuovo e potente metodo di tradurre azioni ed immagini nel linguaggio che favorisce un terzo sistema di rappresentazione>>***[20]

Peraltro il Bruner precisa: ***<<Se è vero che l'abituale decorso dello sviluppo íntellettuale procede dalla rappresentazione attiva, attraverso quella iconica, alla rappresentazione simbolica della realtà, è probabile che la migliore progressione possibile seguirà la stessa direzione>>***[21].

Condizione imprescindibile è che si tratti sempre di un "passaggio", il quale deve potersi realizzare sia nel movimento dalla realtà verso la rappresentazione mentale, sia nel verso opposto; dal simbolo o dall'immagine il fanciullo deve poter ritornare alla realtà concreta: questi "passaggi", questi "andirivieni" l'azione didattica deve anche favorire, sia promuovendo l'esperienza concreta, sia stimolando e favorendo, attraverso specifiche attività, i processi della rappresentazione mentale, dell'astrazione e della simbolizzazione.

Una volta che gli alunni abbiano a lungo operato a livello concreto, i problemi possono nascere dall'esperienza precedentemente vissuta anziché dall'esperienza in atto, perché ciò che importa è che il fanciullo riesca a "vivere", "ri-vivere" le situazioni problematiche, anche se a livello di immaginazione, di fantasia o di rappresentazione simbolica.

TRADURRE LE SITUAZIONI PROBLEMATICHE CONCRETE NEL LINGUAGGIO VERBALE

Non è certamente facile distinguere tra l'avvertire e l'esprimere una situazione problematica, poiché il pensiero è legato strettamente al linguaggio, come ha sostenuto, in particolare, il Vygotsky[22].

Anche per questo è estremamente importante che gli alunni siano stimolati ad esprimere essi stessi nel linguaggio verbale le loro esperienze problematiche, le loro domande, i loro interrogativi, di qualsiasi natura essi siano, compresi quindi anche quelli di natura matematica.

In effetti, pure il linguaggio verbale offre strumenti di rappresentazione matematica, perché esso si riferisce anche all'attività matematizzante dell'uomo, cioè all'attività comunque volta a <<***ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà***>>. Esprimiamo già concetti matematici con termini del linguaggio comune, quali *molti-pochi, abbondante-scarso, alto-basso, vicino-lontano, diritto-curvo, tante volte-poche volte, lungo-corto, profondo, largo,.. stretto, esteso* ... Con il linguaggio naturale il bambino assimila la matematica che fa parte del patrimonio culturale comunemente utilizzato.

Gli insegnanti, nel favorire la <<*individuazione di situazioni problematiche in ambiti di esperienze e di studio*>>, debbono promuovere anche la descrizione delle situazioni problematiche attraverso il linguaggio verbale (<<*espressi con parole*>>): dalla descrizione verbale gli alunni potranno poi procedere alla traduzio ne <<*in rappresentazioni matematiche*>> .

Tali attività favoriscono la comprensione del linguaggio comune con il quale i problemi vengono <<espressi>> e la loro successiva traduzione nel linguaggio matematico. In merito occorre tener presente che la

---

[19] PIAGET J., *Avviamento al calcolo*, la Nuova Italia, Firenze, 1956, p. 31
[20] BRUNER J.S., *Studi sullo sviluppo cognitivo*, Armando, Roma, 1967, p. 7.
[21] (BRUNER J.S., *Verso una teoria dell'istruzione*, Annando, Roma, 1967, p. 85.
[22] VYGOTSKY L. S., *Pensiero e linguaggio*, Giunti-Barbèra, Firenze, 1969.

comprensione del linguaggio verbale è agevolata quando esso viene costruito dagli stessi alunni in riferimento alle loro esperienze reali e che esso rappresenta il metalinguaggio per l'introduzione del linguaggio matematico. Tuttavia, alla base del linguaggio deve stare il significato concreto rappresentato dalle situazioni problematiche concrete: queste, e non già i <<*problemi elementari espressi con parole*>> debbono costituire, almeno all'inizio, il punto di partenza del processo di soluzione dei problemi.

In merito è opportuno tener presente l'allegata rappresentazione utilizzata dal Mialaret[23] per descrivere il passaggio dall'azione alla rappresentazione simbolica:

Pur essendo da privilegiare la metodologia didattica fondata sulla individuazione di situazioni problematiche da parte degli alunni, tuttavia, come si è già accennato, è pure da prendere in considerazione la possibilità che i problemi vengano anche posti direttamente dagli insegnanti, seppure in stretto riferimento alle esperienze reali dei fanciulli. In tale prospettiva si pone anche la questione relativa al linguaggio da utilizzare nella formulazione dei problemi.

Poiché il primo momento della soluzione di un problema posto dagli insegnanti consiste nella lettura e interpretazione dell'enunciato, occorre aver cura che questo sia espresso in un linguaggio chiaro, preciso, semplice, aderente sia alla esperienza che alla competenza linguistica dei singoli alunni; l'enunciato del problema non deve costituire un rompicapo per gli alunni.

Come scrive il Mialaret, <<*la forma in cui viene presentato il problema è uno dei fattori di riuscita o di insuccesso dell'alunno ... Le parole adoperate correntemente dai maestri. .. non sono sempre capite in modo perfetto da tutti gli alunni. .. Il ragazzo non possiede sempre bene il vocabolario che noi usiamo*>>![24]

Ciò comporta che non sempre gli alunni riescono a decodificare l'enunciato ed a ricostruire l'effettiva situazione problematica, la cui mancata soluzione è perciò spesso da addebitare unicamente a incomprensione dei termini linguistici utilizzati, e non invece ad incapacità logica.

Pertanto, particolare attenzione da parte degli insegnanti deve essere posta nella cura del lessico e della struttura sintattica dell'enunciato, che deve essere anch'essa rapportata alle capacità di lettura dei singoli alunni. Non solo i termini linguistici possono assumere significati diversi a seconda delle esperienze dei singoli alunni, ma anche la forma in cui sono presentati i dati ed è formulato il quesito può risultare equivoca e non favorire sempre la comprensione della situazione problematica.

Per favorire la comprensione dell'enunciato da parte degli alunni, gli insegnanti possono promuoverne la sua interpretazione anche mediante la drammatizzazione, il racconto, la parafrasi, la traduzione in una rappresentazione concreta od iconica ecc. In tal senso, un problema già formulato e proposto dagli insegnanti viene trasformato in una situazione problematica concretamente vissuta dagli alunni, per cui viene meno la distinzione tra problemi proposti dagli insegnanti e problemi da essi suscitati o individuati dagli alunni.

Solo quando gli alunni hanno adeguatamente compreso l'enunciato, ha inizio l'effettivo processo di soluzione del problema, perché questo consiste nell'affrontare la situazione problematica e non la decodificazione dell'enunciato, che è pur essa esercizio utile, ma nell'ambito della formazione linguistica.

TRADURRE IL LINGUAGGIO VERBALE IN LINGUAGGIO MATEMATICO, SCEGLIENDO MODELLI MATEMATICI ADEGUATI (NUMERI, OPERAZIONI, SIMBOLI, FIGURE GEOMETRICHE ...)

L'alfabetizzazione matematica consiste nell'acquisizione <<*dei quadri concettuali*>>, delle <<modalità di indagine>> e del <<*linguaggio*>> che sono propri della Matematica. Come si precisa nei Programmi didattici per la scuola media del 1979, tra gli obiettivi dell'educazione matematica figura anche quello di <<*usare ed elaborare linguaggi specifici della matematica*>> .

A mano a mano che gli alunni approfondiscono ed acquisiscono concetti matematici, il loro linguaggio naturale si arricchisce del nuovo linguaggio tecnico proprio della matematica, fatto di parole (***addizionare,***

[23] MIALARET G., *L'apprendimento della matematica*, Armando, Roma, 1969, p. 47.
[24] Ibidem, p. 107.

moltiplicare, dividere, numeratore, denominatore, decimi, centesimi, diagonale, cateto, ipotenusa, rombo, trapezio ...), ma anche di simboli specifici **(+, -, x, :, =, <, > ...**).

Gli alunni debbono apprendere ad utilizzare tali termini e simboli, sia nella formulazione dell'enunciato che nella elaborazione delle ipotesi di soluzione del problema, con opportuna gradualità, partendo dalle conoscenze di cui sono già in possesso e dal linguaggio naturale già utilizzato. In merito, è opportuno tener presente che l'attuale simbologia aritmetica è stata introdotta solo da qualche secolo; ad esempio, i segni **+** e **–** dell'addizione e della sottrazione compaiono per la prima volta in un volume di J. Widman del 1489, mentre ancora nel *Liber abaci* del Fibonacci essi venivano indicati con le espressioni "et" (*"5 et 3 fango 8")* e "de" (*"2 de 5 resta ")*[25].

Anche tenendo presente il processo storico di formazione dei concetti, della terminologia e della simbologia matematica, l'introduzione della simbologia matematica dovrà avvenire molto gradualmente, utilizzando progressivamente espressioni e simboli via via più convenzionali. Appare infatti didatticamente inopportuno introdurre sin dall'inizio rappresentazioni matematiche ad un livello avanzato di formalizzazione.

L'avvertenza <<*ciò, peraltro, non comporterà necessariamente l'impiego della simbologia matematica relativa agli insiemi e alle operazioni insiemistiche e logiche*>> ovviamente non vale solo per la logica ma anche per tutti gli altri temi dell'educazione matematica.

Indubbiamente, i PD85, pur non esplicitando il discorso da noi fatto, non lo ignorano, ma lo danno per scontato e pongono l'accento soprattutto sui problemi già <<*espressi con parole*>>, ai fini della loro traduzione nel linguaggio matematico.

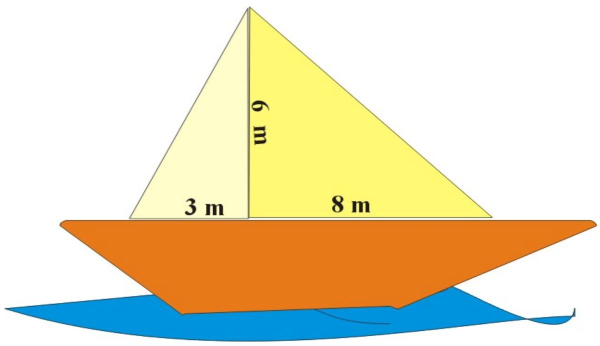
Tuttavia, sia che i problemi vengano individuati dagli alunni in situazioni problematiche concrete, sia che vengano proposti già <<*espressi con parole*>>, si pone l'esigenza della loro traduzione in <<*rappresentazioni matematiche*>>. Questa traduzione va effettuata, non solo nel momento in cui vengono formulate le <<*ipotesi di soluzione*>>, ma anche precedentemente, nella fase propedeutica, al fine di facilitare l'analisi della situazione problematica, e quindi la stessa formulazione delle ipotesi di soluzione.

Come si prevede nei Programmi didattici del 1979 per la scuola media, <<*"risolvere un problema" non significa soltanto applicare regole fisse a situazioni già schematizzate, ma vuol dire anche affrontare problemi allo stato grezzo per cui si chiede all'allievo di farsi carico completo della sua traduzione in termini matematici*>>.

In effetti, come scrive il Mialaret, <<*per un fanciullo di sette anni risolvere un problema ... significa compiere, realmente o in pensiero, un'operazione concreta, poi "tradurla" per mezzo di un'operazione ... Saper correttamente tradurre significa il più delle volte porre correttamente il problema stesso*>>[26].

LE RAPPRESENTAZIONI MATEMATICHE

Un problema esiste indipendentemente dal linguaggio in cui esso è espresso. Si può avvertire l'esigenza di conoscere le misure dei tiranti dell'albero della nave in base all'altezza dell'albero ed alla distanza dei punti di fissaggio, senza conoscere il teorema di Pitagora. Nel linguaggio comune questa sitazione problematica potrebbe essere espressa pressappoco così: "*Si desidera conoscere le lunghezze dei tiranti dell'albero di una nave, sapendo che l'albero è alto sei metri e che i punti di fissaggio dei due tiranti distano rispettivamente otto e tre metri dalla base dell'albero*".



Tali problemi nascono anche in chi non conosce il teorema di Pitagora, anche se vengono risolti con strumenti anch'essi matematici, ma che si pongono ad un livello di elaborazione meno avanzato, cioè attraverso l'attività di misurazione.

La traduzione di questo problema nel linguaggio matematico potrebbe essere la seguente: "*Calcolare le ipotenuse di due triangoli rettangoli aventi un cateto comune di 9 m ed il secondo cateto rispettivamente di 8 m e di 3 m".*

Questa è una situazione problematica adeguata ad alunni di scuola media, ma da noi utilizzata per meglio rendere evidenti i termini matematici utilizzati: *ipotenusa*; *triangoli rettangoli; cateti ...*

---

[25] AA. VV., *La notazione posizionate e le tecniche delle operazioni - Storia, contenuti e strategie didattiche,* Dipartimento di Matematica, Università di Modena, Rapporto tecnico n. 6, p. 15; CALDELLI M. L., *Cenni di storia e filosofia della matematica,* F. Angeli, Milano, 1987.

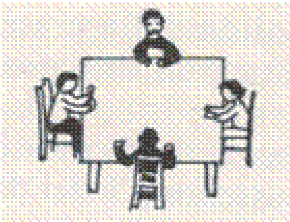
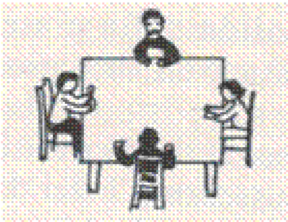
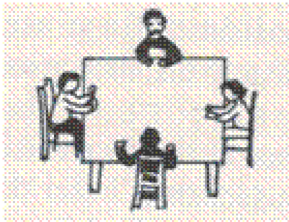
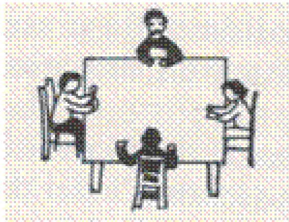
[26] MIALARET G., *Op. cit.,* p. 171.

Evidentemente, a livello di scuola elementare si può fare riferimento ad altre più elementari situazioni problematiche concrete <<*espresse con parole*>> da tradurre <<*in rappresentazioni matematiche*>>, utilizzando cioè concetti e simboli matematici (figure, numeri, segni, diagrammi ecc.).

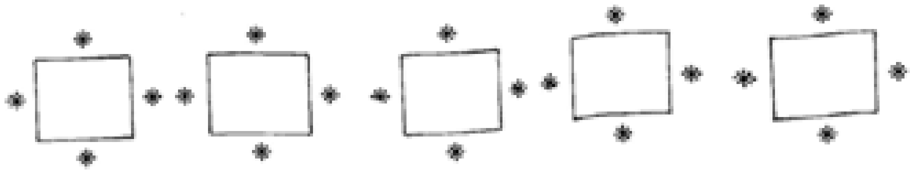
Ad esempio, dovendo preparare il refettorio, la domanda *"Quanti tavoli occorrono per la nostra classe?"* costituisce un problema elementare espresso con parole che potrebbe essere così tradotto in linguaggio matematico *"Quanti tavoli di 4 posti occorrono nel refettorio per la nostra classe che è costituita da 20 alunni?".*

Tale problema può essere affrontato e risolto a diversi livelli di rappresentazione matematica.

Ad esempio, una prima soluzione, quando gli alunni non sanno ancora operare con i numeri potrebbe essere quella di far sedere gli alunni intorno ai tavoli, contando poi quanti ne sono stati occupati.

A livello di rappresentazione, questa soluzione potrebbe essere affrontata effettuando il disegno schematico degli alunni (con un asterisco) e dei tavoli:



In questo caso il problema potrebbe essere così formulato *"Quanti tavoli dì 4 posti si utilizzano per 20 alunni?"*

Ad un livello più schematico si potrebbe ricorrere al semplice raggruppamento per quattro degli alunni:

**** **** **** **** ****

In questo caso la traduzione matematica del problema potrebbe essere la seguente *"Quanti gruppi di 4 alunm si formano con 20 alunni?".*

Il problema potrebbe essere risolto: con l'addizione:

GRUPPI DI 4 ALUNNI	TOTALI ALUNNI	N. GRUPPI
4	4	1
4+4	8	2
4+4+4	12	3
4+4+4+4	16	4
4+4+4+4+4	20	5

Ovvero GRUPPI DI 4 ALUNNI:

GRUPPI	1	2	3	4	5
SOMME	4	4+4	4+4+4	4+4+4+4	4+4+4+4+4

Oppure potrebbe essere risolto con la sottrazione (*divisione canadese*)

SOTTRAZIONI	GRUPPI DI 4 ALUNNI
20─4 = 16	1
16─4 = 12	2
12─4 = 8	3
8─4 = 4	4
4─4 = 0	5

Oppure con la moltiplicazione: **4 x ... = 20.**

Ovvero con la divisione: **20:4 =** ...

Utilizzando concetti matematici più complessi, un problema, espresso con parole e da tradurre in rappresentazioni matematiche, potrebbe essere il seguente: "*Quante FIAT PUNTO possono essere posteggiate sui due lati del viale antistante la scuola?*" .

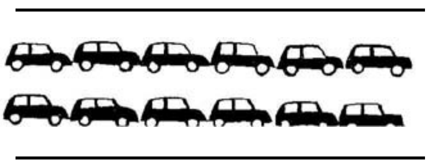
Anche questo problema può essere tradotto in rappresentazioni matematiche a diversi livelli.

In merito, però, si tenga presente che già l'attuale formulazione è matematica, perché esprime un'esigenza di quantificazione.

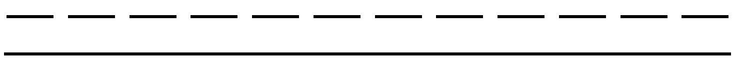
Una prima soluzione, a livello operativo, sarebbe quella di posteggiare le auto, l'una dopo l'altra, a cominciare dalla prima, e poi contarle.

Ad un livello più tecnico il suddetto problema potrebbe essere così tradotto in linguaggio matematico: "*Sapendo che un'auto è lunga circa 4 metri, quante macchine possono essere posteggiate sui due lati del viale antistante la scuola che è lungo 24 metri?".*

La soluzione potrebbe essere ricercata disegnando il viale ed un modellino di auto nella stessa scala e sistemando le auto sui due lati del viale.



La situazione potrebbe essere ulteriormente schematizzata, rappresentando il viale con una sola linea di 48 m e le auto con segmenti di 4 m, sempre in scala:



A questo punto, la soluzione potrebbe essere meramente aritmetica, effettuando la divisione 40:4 = 10.

A proposito, si rilevi come la soluzione viene via via schematizzata, con la conseguente perdita delle sue caratteristiche particolari, irrilevanti dal punto di vista matematico. Mentre la situazione pratica, consistente nella effettiva sistemazione delle auto, conserva le caratteristiche reali della situazione, nella costruzione del modello il viale viene rappresentato con due segmenti e le auto con le loro sagome; nella successiva rappresentazione grafica il viale diventa un segmento e così le auto; infine, nella soluzione matematica, il viale non ha più caratteristiche spaziali, perché esso è rappresentato unicamente dal numero 40 e dal numero che indica la misura della lunghezza delle auto (4): 40:4=10.

A questo livello, il processo di schematizzazione si è trasformato in vera e propria astrazione e la rappresentazione matematica 40:4 potrebbe riferirsi alle più varie situazioni concrete: un solo lato del viale di 40 metri; la sistemazione di 40 caramelle in 4 sacchetti ...

Nel rinviare il discorso sugli <<***strumenti matematici***>> da utilizzare nella soluzione dei problemi, in questa sede riteniamo opportuno approfondire ancora la questione della traduzione del linguaggio comune in linguaggio matematico nella formulazione degli enunciati.

Tale esigenza, che può porsi anche in riferimento alla proposta di problemi attraverso enunciati già formulati, acquista maggiore rilievo in considerazione del fatto che, secondo I'impostazione metodologica prevista dai PD85, l'attività di soluzione dei problemi muove dalle concrete situazioni problematiche più che da enunciati già formulati.

La descrizione di una situazione problematica viene naturalmente effettuata, in un primo momento, attraverso il linguaggio comune, anche se non sono da escludere altri linguaggi, quali quelli gestuali, mimici, motori, ecc.

Ad esempio, per affrontare la soluzione del problema "*Abbiamo comperato una mezza dozzina di matite a 330 lire l'una. Quanto abbiamo speso?"*, si pone evidentemente l'esigenza di una preventiva riscrittura dell'enunciato in un linguaggio più matematico, traducendo 1'espressione "*mezza dozzina*" nel corrispondente numero espresso in cifre "*Abbiamo comprato 6 matite ...* ".

In effetti, questa traduzione, che qui è stata presentata in modo esplicito, viene implicitamente sempre effettuata, quando si affronta il problema: la mezza dozzina viene interpretata come 6.

È opportuno esplicitare tali operazioni di traduzione, ai fini della migliore comprensione e quindi della soluzione delle situazioni problematiche.

La traduzione in rappresentazioni matematiche può essere realizzata anche attraverso la schematizzazione della situazione problematica. In tale attività, particolare importanza assume, quando è possibile, un'adeguata rappresentazione delle situazioni anche mediante il disegno geometrico, la cui effettiva rispondenza alla situazione reale, anche con l'utilizzazione di scale di ingrandimento e impicciolimento, può costituire un notevole aiuto alla soluzione del problema. In tal senso, è opportuno che i problemi geometrici vengano sempre affrontati effettuando il disegno delle figure con squadra, riga e compasso.

FORMULARE E GIUSTIFICARE IPOTESI DI RISOLUZIONE CON L'USO DI APPROPRIATI STRUMENTI MATEMATICI, SIA ARITMETICI, SIA DI ALTRO TIPO

Analisi dell'enunciato

Quando l'alunno affronta una situazione problematica deve impegnarsi innanzitutto nella sua comprensione. Quest'attività risulta particolarmente importante quando si tratta di problemi <<*espressi con parole*>> e comporta un'attenta analisi dell'enunciato.

Di solito questa analisi non viene adeguatamente curata, per cui gli alunni non di rado si avventurano nell'esecuzione di operazioni senza avere ben compreso la situazione problematica. Come si è già detto, una non trascurabile difficoltà nella risoluzione dei problemi consiste proprio nella mancata comprensione dell'enunciato.

Pertanto, è opportuno che gli alunni non si limitino ad una lettura superficiale, anche se ripetuta, dell'enunciato, ma si impegnino in una sua interpretazione che può risultare più efficace se si traduce, come già si è accennato, in una parafrasi o nella traduzione in un racconto, in una drammatizzazione, in un disegno ...

La decodificazione e l'analisi dell'enunciato vanno effettuate tenendo presente, più che i dati, come a volte avviene, soprattutto il quesito posto, poiché solo da questo si può comprendere la situazione problematica e si possono individuare i suoi elementi significativi, cioè i dati del problema. In effetti la situazione problematica nasce dalla domanda, cioè dal quesito. Nella stessa situazione, con gli stessi dati, si possono formulare quesiti diversi, cioè problemi diversi. Tuttavia, dati e quesito sono interconnessi: quando si parte dai dati, questi non possono non essere messi in relazione con il quesito, perché diventino significativi; e, d'altra parte, quando si parte dal quesito, occorre andare ai dati, poiché in effetti solo in base ad essi è possibile rispondere al quesito.

Come scrive il Petter, <<*è chiaro ... che non si tratta di due procedimenti totalmente indipendenti. L'analisi dell'obiettivo deve infatti essere svolta tenendo in certa misura conto del materiale a disposizione; d'altra parte, anche l'analisi del materiale può venir compiuta in modo produttivo solo se viene condotta in vista dell'obiettivo*>>[27].

L'analisi dell'enunciato è un'attività da svolgere a livello individuale, ma non è da escludere il lavoro di gruppo[28], poiché l'educazione matematica si fonda pure sul <<*confronto di idee, comportamenti, soluzioni alternative, in un clima positivo di socializzazione*>>.

L'individuazione di una situazione problematica in ambiti di esperienza e di studio e la sua eventuale descrizione <<*con parole*>> ovvero la ricostruzione di una situazione problernatica muovendo dall'analisi di un enunciato, una volta effettuata la loro eventuale traduzione in un linguaggio più matematico, culminano nella <<*formulazione e giustificazione di ipotesi di soluzione con l'uso di appropriati strumenti matematici, sia aritmetici, sia di altro tipo*>>.

Formulazione di ipotesi

Un'impostazione razionale del procedimento di risoluzione di problemi richiede che, dopo aver ben compreso la situazione problematica, anche attraverso un'accurata analisi dell'enunciato, non si vada all'esecuzione delle operazioni, procedendo alla cieca, meccanicamente, a caso, ma si proceda ad un'accurata definizione della sequenza delle operazioni da eseguire, cioè dell'algoritmo risolutivo.

In tale prospettiva, quelle che nella prassi didattica tradizionale di risoluzione dei problemi erano le cosiddette "***Indicazioni***", spesso riduttivamente costituite dalla rappresentazione schematica delle operazioni già effettuate nella minuta, debbono invece costituire l'algoritmo preventivo, nel quale vanno indicate le operazioni e sia definito l'ordine della loro esecuzione.

L'individuazione, la scelta e la definizione delle ipotesi risolutive (<<*operazioni adatte*>>), costituiscono il momento più importante dell'attività di soluzione dei problemi. In esse gli alunni sono impe-

---

[27] PETTER G., *Il contributo di Karl Duncker allo studio del pensiero produttivo,* in DUNCKER K., *La psicologia del pensiero produttivo,* Giunti-Barbèra, Firenze, 1969, p. XVIII.

[28] In merito al *Cooperative learning* cfr.: JOHNSON, D.W. ET AL., *Apprendimento Cooperativo in Classe,* Edizioni Erickson, Trento, 1997; PONTECORVO C., AIELLO A.M., ZUCCHERMAGLIO C., *Discutendo si impara. Interazione sociale e conoscenza a scuola*, NIS, Roma, 1991; PONTECORVO C. (a cura di), *La condivisione della conoscenza*, La Nuova Italia, Firenze, 1993; PONTECORVO C., AIELLO A.M., ZUCCERMAGLIO C., (a cura di), *I contesti sociali dell'apprendimento. Acquisire conoscenze a scuola, nel lavoro, nella vita quotidiana*, LED, Milano, 1995;. LIGORIO M.B., *Apprendimento e collaborazione in ambienti di Realtà Virtuale. Teoria, metodi, tecniche ed esperienze*, Garamond, Roma 2002

gnati ad inventare un nuovo strumento (concetto, operazione ecc.) o ad elaborare un'adatta sequenza di operazioni, combinando congruamente gli strumenti di cui sono già in possesso. Essi debbono ipotizzare, cioè prevedere, immaginare, rappresentarsi mentalmente l'operazione o la successione di operazioni da eseguire per la risoluzione del problema.

La ricerca delle ipotesi di soluzione di una situazione problematica può essere effettuata facendo ricorso alle più varie strategie del pensiero, cioè procedendo ***meccanicamente***, ***per associazione***, ***per tentativi ed errori***, oppure facendo ricorso all'intuizione intellettuale (***insight***)[29].

In merito alle strategie di soluzione dei problemi, è opportuno evitare quelle che fanno affidamento su processi del tipo ***"stimolo-risposta"*** o ***"associativo"***, in quanto la soluzione di problemi è finalizzata soprattutto allo sviluppo del pensiero, e questo non si sviluppa certamente quando non viene attivato, come si verifica nei casi in cui le operazioni sono effettuate meccanicamente in risposta ad un determinato stimolo.

Ad esempio, se l'alunno associa la sottrazione ai verbi *perdere, togliere, rompere ...* , a prescindere dal fatto che non sempre in presenza di tali verbi il problema si risolve con una sottrazione, occorre tenere presente che, anche quando la soluzione risulta corretta, l'attività svolta non ha alcuna rilevanza formativa. Che l'alunno risolva correttamente il problema "*Quante delle 40 uova ha portato al mercato la contadina, se nel viaggio ne ha rotte 12?",* utilizzando lo stimolo "*ne ha rotte*" per effettuare la sottrazione **40-12= 28**, potrebbe risultare utile alla contadina, ma non certamente all'alunno, i cui poteri mentali non ne trarrebbero alcun miglioramento, per cui egli molto probabilmente sbaglierebbe la soluzione del problema *"la contadina ha rotto durante il viaggio 12 uova ed è arrivata al mercato con 28 uova. Con quante uova era partita da casa ?"*, perché l'espressione "*ha rotto*" lo indurrebbe di nuovo ad effettuare una sottrazione **(28-12→16).**

Il discorso è diverso relativamente ai procedimenti ***"per tentativi ed errori",*** in merito ai quali occorre distinguere quelli che vengono effettuati meccanicamente da quelli che vengono effettuati razionalmente.

I primi consistono nell'utilizzare i vari strumenti disponibili (addizione, sottrazione, moltiplicazione ...), uno dopo l'altro, a caso, senza alcuna scelta, fino a quando non si raggiunge il risultato voluto.

Ad esempio, dovendo calcolare l'area di un rettangolo lungo **60 m** e alto **15 m**, l'alunno può effettuare prima l'addizione **60 + 15 = 75**, poi la sottrazione **60─15 = 4**5, la divisione **60:15 = 4** ed infine la moltiplicazione **60x15 = 900** che porta al risultato corretto.

In merito occorre precisare che si tratta di una strategia estremamente meccanica, perché non mette in azione l'intelligenza, e pur dispendiosa, in quanto può comportare anche una lunga serie di operazioni inutili. Peraltro, l'alunno non è in condizione di stabilire da solo se il risultato è esatto e perciò ha bisogno di controllarlo tramite l'insegnante o un prontuario dei risultati.

Perciò, si tratta di una strategia, la quale, anche se porta a dei risultati utili dal punto di vista pratico, ha una scarsa valenza formativa e quindi va scoraggiata, al pari dei procedimenti ***"stimolo-risposta"***.

Accanto ai procedimenti meccanici ***"per tentativi ed errori"***, peraltro estremamente rari nella forma pura in cui sono stati descritti, si hanno però altri simili procedimenti a livelli meccanici sempre meno consistenti che si fondano su una preventiva eliminazione di alcune operazioni, per cui il numero dei tentativi risulta più o meno ridotto.

Ad esempio, per risolvere il problema di cui sopra, l'alunno può scartare in anticipo la sottrazione e la divisione, perché si tratta di operazioni che egli non ha mai utilizzato per il calcolo del perimetro o dell'area del rettangolo, ed effettuare solo l'addizione e la moltiplicazione, scegliendo poi quest'ultima.

Pur non essendo da eliminare in assoluto i procedimenti ***"per tentativi ed errori***, anche perché nelle forme meno meccaniche risultano utili, tuttavia le strategie da privilegiare sono senz'altro quelle che si fondano sull'intuizione (*insigh*), cioè sulla scoperta della soluzione in base ad una comprensione della situazione problematica realizzata soprattutto attraverso una ristrutturazione della stessa.

Più che ad associare risposte a determinati stimoli, dei quali si assicura la presenza nell'enunciato, o ad effettuare tentativi più o meno meccanici, gli insegnanti debbono stimolare gli alunni a formulare ipotesi di so-

---

[29] In merito, così scrive il Kanizsa: <<*Un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso.* ***L'esistenza di una motivazione e la presenza, nella situazione problematica, di un impedimento che non permette l'azione diretta creano uno stato di squilibrio e di tensione nel campo cognitivo dell'individuo. Per ristabilire l'equilibrio, cioè per cercare di risolvere il problema, egli può andare a tentoni, provare a caso varie forme di comportamento, e trovare cosi, appunto a caso, la via o il modo per passare dalla situazione insoddisfacente in cui si trova a quella alla quale tende. Invece di affidarsi in modo cieco ad una serie di tentativi casuali, l'individuo può mettersi a pensare e pervenire alla soluzione attraverso un comportamento intelligente***» (G. KANIZSA, *Il «problem solving...* , cit., p. 35).

luzione tenendo presenti i rapporti complessivi che possono essere stabiliti tra i dati della situazione problematica[30].

Ai fini della comprensione delle situazioni problematiche e dell'individuazione delle ipotesi risolutive si può partire, come si è già accennato, sia dall'analisi del quesito che dall'analisi dei dati. In effetti, come afferma il Duncker, «*una soluzione sorge dalle richieste che ciò che si ricerca pone a ciò che è dato*»[31]. In tale prospettiva, rilevante significato assume l'analisi dell'obiettivo, intesa come esplicitazione del quesito. In effetti, la soluzione di un problema consiste sempre nell'esplicitare il contenuto dell'enunciato: la soluzione non aggiunge nulla a quanto era in esso già contenuto. L'alunno deve chiedersi ***"che cosa si vuole effettivamente?", "che cosa significa la domanda?"***. D'altra parte, però, risulta anche importante analizzare i dati per individuare le possibili operazioni che con essi possono essere effettuate e poi scegliere quella ritenuta valida,

Il Polya definisce regressivo il procedimento che muove dal quesito e progressivo quello che muove dati[32]. In merito è opportuno tener presente i procedimenti ***top down*** e ***bottom up*** presi in considerazione in riferimento alle attività con il linguaggio LOGO (cfr. PSI.5).

Poiché ogni individuo ha modi di pensiero diversi da quelli degli altri, l'insegnante non deve imporre delle strategie, ma deve verificare quali sono quelle che i singoli alunni utilizzano, sia per tenerne conto nell'organizzazione delle situazioni di apprendimento ─le quali anche per questo debbono essere personalizzate[33]─, sia per promuovere eventualmente lo sviluppo di strategie più produttive.

Alla formulazione delle ipotesi di soluzione, cioè delle operazioni o delle successioni di operazioni da eseguire (algoritmi risolutivi) gli alunni debbono pervenire attraverso l'utilizzazione delle strategie loro più congeniali.

Anche nel rispetto delle strategie individuali di pensiero che l'insegnante deve impegnarsi a conoscere, per tenerne conto nell'azione didattica e per promuovere Ia loro eventuale integrazione con altre più produttive strategie, è opportuno che l'insegnante favorisca al massimo la creatività degli alunni, stimolando la elaborazione delle ipotesi risolutive più diverse.

Gli alunni debbono essere educati a "vedere" tutte le possibili ipotesi risolutive. La formulazione di una pluralità di ipotesi ha significato, sia perché quasi sempre i problemi hanno diverse soluzioni ─anche in matematica non esistono vie obbligate! ─, sia per evitare di far acquisire esclusivamente modalità uniformi, standardizzate, convergenti di pensiero, le quali si configurano più come apprendimenti meccanici che come stimolo ed attivazione del pensiero ai fini dello sviluppo. Nella pratica didattica qualche volta si dimentica che il risultato della soluzione dei problemi non ha alcuna utilità pratica, ché l'alunno non è il droghiere o l'agrimensore, e si ricorre ad ogni scorciatoia, compreso il suggerimento diretto o indiretto dello schema risolutivo, trasformando così la soluzione del problema in un esercizio privo di valenza formativa.

Impegnare gli alunni nella soluzione di problemi ha senso unicamente se questa attività serve ad attivare i loro processi mentali di intuizione, immaginazione, progettazione ecc.), di cui la formulazione di ipotesi costituisce aspetto essenziale.

In tale prospettiva, la formulazione di una varietà di ipotesi risolutive costituisce un essenziale obiettivo da perseguire, non solo per favorire una ricerca delle soluzioni che attivi i poteri mentali dei singoli alunni, senza ricorrere così a procedure meccaniche, ma anche perché favorisce l'espressione dell'originalità di pensiero. Questa originalità non consiste tanto nel ricorso agli strumenti più strani, quanto nella diversa, nuova, singolare combinazione degli strumenti più comuni. Come afferma l'Oléron, «*più spesso i risultati sono raggiunti mediante l'impiego di metodi relativamente familiari, la combinanazione di questi metodi o il loro adattamento alla situazione nuova. L'originalità, per essere effettiva, non ha bisogno di essere assoluta*»[34].

---

[30] Sulle diverse teorie dell'apprendimento, tra le tante opere, cfr.: HILGARD E. R., BOWER G H., *Le teorie dell'apprendimento*, F. Angeli, Milano, 1974; HILL W. F., *L'apprendimento - Interpretazioni psicologiche*, La Nuova Italia, Firenze, 1970; O'CONNOR K., *Introduzione all'apprendimento*, La Nuova Italia, Firenze, 1973; EHRLICH S., *Apprendimento e memoria nell'uomo*, Ed. Paoline, Roma, 1978; ANTONIETTI A., *Psicologia dell'apprendimento*, La Scuola, Brescia, 1998; BOSCOLO P., *Psicologia dell'apprendimento scolastico*. Aspetti cognitivi, Utet, Torino 1986.

[31] K. DUNCKER, *La psicologia del pensiero produttivo*, Giunti-Barbèra, 1969, p. 25.

[32] POLYA G., *La scoperta matematica - Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi,* Feltrinelli, Milano, 1970. In merito, cfr.: SPERANZA F. et alii, *Insegnare la matematica nella scuola elementare*, Zanichelli, Bologna, 1986, pp. 262 ss.; TENUTA U., *Itinerari aritmetici*, La Scuola, Brescia, 1991.

[33] In merito cfr.: GARCIA HOZ V., *Educazione personalizzata*, Firenze, Le Monnier, 1981; GARCIA HOZ V. ET ALII, *Dal fine agli obiettivi dell'educazione personalizzata*, Palumbo, Palermo, 1997; MONTEDORO C. (a cura di), *La personalizzazione dei percorsi di apprendimento e di insegnamento*, Angeli, Milano, 2001.

[34] OLÉRON P., *Le attività intellettive*, Giunti-Barbèra, Firenze, 1973, p. 147.

In merito, è opportuno tener presente che la soluzione dei problemi viene affrontata quasi sempre con gli strumenti di cui si è in possesso[35] e che gli alunni pervengono alla scoperta di nuovi strumenti, solo se sono opportunamente stimolati, orientati e guidati dagli insegnanti.

Aggiunge l'Oléron che «*è indiscutibile che il soggetto, posto di fronte a un problema, utilizza i metodi che ha avuto occasione di esercitare e che ha messo in atto in situazioni analoghe*».

Anche l'intuizione è favorita dalle menti ben preparate, in quanto, come afferma il Bruner, «*colui che ha buone capacità intuitive può essere nato con una dote speciale, ma la capacità di farne uso gli può essere data soltanto da una conoscenza solida della materia, da un sicuro possesso del sapere che solo può prestare all'intuizione il materiale con cui operare*»[36].

In effetti, secondo la teoria del Forma, la soluzione di un problema consiste nella "*ristrutturazione*" dei dati della situazione problematica da parte dell'alunno, il quale «*porta ordine in questi dati, isolando certi elementi, avvicinandoli, stabilendo connessioni tra loro, sostituendo schemi più chiari a ciò che è stato presentato. E tutto ciò alla luce delle conoscenze acquisite*»[37].

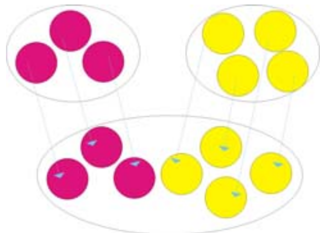
In tal senso, assumono rilievo le precedenti conoscenze ed esperienze dell'alunno, ma anche il suo stato affettivo che lo spinge a perseguire l'obiettivo del problema. Sono i bisogni, le motivazioni, gli interessi dell'alunno che mobilitano le sue conoscenze ed i suoi ricordi, consentendo di dar «*rilievo a oggetti o aspetti della situazione che sfuggono a un occhio indifferente*».

In merito, si tenga presente che, secondo il Maier, la ristrutturazione della situazione problematica in vista della soluzione si identifica con la *«"riformulazione del problema" in termini più produttivi, cioè (con) una riorganizzazione che normalmente è la conseguenza di un' "analisi dell'obiettivo" da parte del soggetto>>*[38].

Anche in tale prospettiva, la formulazione delle ipotesi risolutive si traduce in un impegno di rielaborazione e di riscrittura dell'enunciato che possono essere realizzati anche con l'ausilio di opportune rappresentazioni iconiche, grafiche, simboliche. È questa un'attività analoga alla «rielaborazione del testo» di Lingua che però si avvantaggia anche degli strumenti specifici di rappresentazione matematica. Tra questi possono essere utilizzati, come vedremo, non solo le cifre ed i simboli ma anche figure geometriche, diagrammi ad albero, diagrammi di flusso, espressioni ... Particolare importanza assume a tal fine l'attività di schematizzazione della situazione problematica, utilizzando non solo figure o simboli ma anche segni ai quali viene attribuito valore di simboli. Come si è visto, nel problema dei tavoli da sistemare nel refettorio, si è ricorsi ad una schematizzazione, prima mediante lo schizzo dei tavoli e dei quattro alunni seduti intorno ad essi.

Poi mediante la rappresentazione dei gruppi di quattro alunni asterischi: **** **** **** ****.

I diagrammi di Venn, ad albero ecc. possono costituire utili strumenti per schematizzare le situazioni e pervenire alla elaborazione delle ipotesi risolutive.



Ad esempio, per individuare l'ipotesi risolutiva del problema "*Maria ha 3 biglie rosse e 4 gialle. Quante in tutto?",* gli alunni debbono innanzitutto domandarsi che cosa effettivamente richiede il quesito:

- la differenza tra le biglie rosse e le biglie gialle;
- il numero totale delle biglie indipendentemente dal loro colore.

A tal fine, per comprendere meglio la situazione problematica con preciso riferimento al quesito "*Quante in tutto*?", gli alunni possono procedere alla rappresentazione della situazione problematica mediante i diagrammi di Venn.

In base a tale rappresentazione emerge chiaramente che l'espressione "***Quante in tutto***?" si riferisce al numero totale delle biglie, indipendentemente dal colore. Anche la formulazione delle ipotesi risolutive può essere effetttuata individualmente dai singoli alunni o in gruppo[39], eventualmente ricorrendo alla tecnica del *brainstorming* (*tempesta*, messa in moto dei cervelli)[40], in modo che gli alunni, anche stimolati dai compa-

---

[35] *<<È indiscutibile che il soggetto, posto di fronte a un problema, utilizza i metodi che ha avuto occasione di esercitare e che ha messo in atto in situazioni analoghe>>* (OLÉRON P.,Op. èit:, p. 151).

[36] BRUNER J.S., Dopo Dewey, cit., p. 98.

[37] OLERON P., Op. cit., p. 155..

[38] OLERON P., Op. cit., p. 157.

[39] In merito AL *Cooperative learning* cfr.: JOHNSON, D.W. ET AL., *Apprendimento Cooperativo in Classe,* Edizioni Erickson, Trento, 1997; PONTECORVO C., AIELLO A.M., ZUCCHERMAGLIO C., *Discutendo si impara. Interazione sociale e conoscenza a scuola*, NIS, Roma, 1991; PONTECORVO C. (a cura di), *La condivisione della conoscenza*, La Nuova Italia, Firenze, 1993; PONTECORVO C., AIELLO A.M., ZUCCERMAGLIO C., (a cura di), *I contesti sociali dell'apprendimento. Acquisire conoscenze a scuola, nel lavoro, nella vita quotidiana*, LED, Milano, 1995;. LIGORIO M.B., *Apprendimento e collaborazione in ambienti di Realtà Virtuale. Teoria, metodi, tecniche ed esperienze*, Garamond, Roma 2002 .

[40] BARKEN A., *Saper creare idee con il brainstorming*, Edicart, Legnano, 2003; BESSE A.: ed altri, *Il brainstorming: cosa è e come si applica*, ET AS KOMPASS, Milano, 1963; BEZZI C. E BALDINI I., *Il brainstorming. Pratica e tecnica*, Franco Angeli, Milano 2006; SPALTRO E. (a cura di) (1958), *Brainstorming ... cosa è e come si applica*, Ed. ET/AS Kompas, Milano, 1963.

gni, possano avanzare le più varie ipotesi risolutive.

In merito alla formulazione delle ipotesi di soluzione di problemi matematici, è opportuno considerare le diverse situazioni nelle quali può venire a trovarsi l'alunno.

Innanzìtutto, occorre distinguere tra i problemi finalizzati all'acquisizione di un nuovo strumento matematico e problemi che invece possono essere risolti con gli strumenti di cui gli alunni sono già in possesso.

Si tratta di una distinzione molto importante. Infatti, mentre i problemi finalizzati alla scoperta di un nuovo concetto matematico, di una nuova operazione, di una nuova regola ecc. comportano una notevole attività di stimolazione e di orientamento da parte dell'insegnante, che deve guidare gli alunni lungo tutto l'itinerario che porta alla scoperta (cfr. la maieutica socratica), invece la soluzione degli altri problemi richiede meno cure da parte degli insegnanti.

Relativamente a questo secondo tipo di problemi gli alunni, in linea di massima, possono trovarsi nelle seguenti situazioni:

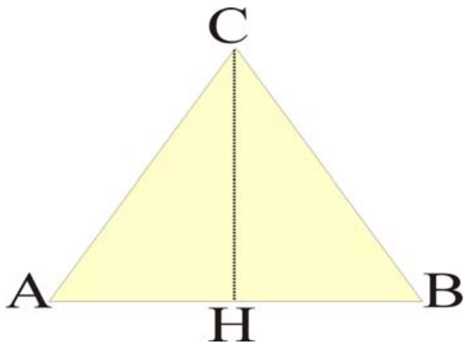
a) è possibile utilizzare un solo strumento matematico (modello, concetto, operazione ...).

In questo caso, l'alunno ne deve essere già in possesso e l'impegno richiestogli dal problema consiste unicamente nel fatto che egli deve individuare tale strumento o "ricordarlo" . Innanzitutto, si può verificare che l'alunno non sappia quale strumento utilizzare tra quelli che egli conosce (addizione, sottrazione, roltiplicazione, frazione ...). In questo caso il suo impegno consiste nel comprendere, nell'intuire, nello scegliere lo strumento idoneo.

Ad esempio, dovendo risolvere il problema *"Maria ha 10 anni, 3 più di Stefania. Quanti anni ha Stefania?",* l'alunno si trova nella condizione di dover scegliere tra l'addizione **lO + 3** e la sottrazione **1O ─ 3**. Tale scelta può essere effettuata in base ad un atto di comprensione della situazione problematica che porta l'alunno a ristrutturare le informazioni date, nel senso di non considerare che Maria ***"ha 3 anni in più"*** di Stefania, ma nel senso che Stefania "***ha 3 anni in meno"*** di Maria. Ristrutturare la situazione problematica, secondo la Gestalpsicologie, significa appunto vedere, stabilire, intuire nuovi rapporti tra i dati.

Tuttavia, l'intuizione dell'operazione risolutiva si pone sempre come un'ipotesi da verificare. La.verifica può essere operata sul risultato della sottrazione **lO - 3 = 7**, effettuando l'operazione inversa **7 + 3 = 10** (Stefania ha 7 anni, Maria ne ha **3** in più, quindi ne ha **7 + 3:** esattamente **lO**, come indicato nell'enunciato).

Come si rileva, quando l'alunno non ricorre a procedimenti meccanici, è anche nella condizione di effettuare da solo la verifica della validità delle ipotesi formulate e quindi del risultato della soluzione del problema.



Tuttavia, si può anche verificare che l'alunno non abbia presente alla sua mente lo strumento da utilizzare.

Ad esempio, dovendo calcolare il perimetro di uno dei due triangoli in cui risulta suddiviso un triangolo equilatero di lato 12 cm dalla sua altezza che misura 10,4 cm, l'alunno deve richiamare alla memoria ─deve fare uno sforzo di memoria─, cioè deve impegnarsi a "ricordare" che l'altezza divide in due parti eguali la base, per cui sarà di 6 cm:

Perimetro → CH + CB + HB → 10,4 + 12 + 12/12 →22,4 + 6 →28,4 _

In questi casi, la riflessione dell'alunno verte, più che sull'obiettivo, costituito dal perimetro, il quale gli dice che egli ha bisogno di conoscere le misure dei tre lati, soprattutto sui dati forniti dall'enunciato: triangolo equilatero, altezza, misura del lato, due triangoli rettangoli in cui il triangolo equilatero risulta diviso dall'altezza.

La riflessione su ciascuno di questi dati lo deve portare a richiamare alla sua memoria altri dati, altre conoscenze, altre operazioni che potrebbero costituire lo strumento di risoluzione del problema.

Ad esempio, il dato "*triangolo equilatero*" gli fa ricordare che i tre lati sono eguali e che quindi AB= AC= BC= 12. Ma questo non basta, anche se gli offre un indizio, un ulteriore dato su cui riflettere: AB misura 12 cm, ma quanto misura HB? In questa situazione può domandarsi in quale relazione si pongono AH ed HB, anche in rapporto ad AB. Da questa domanda egli può essere aiutato a ricordare che l'altezza del triangolo equilatero è asse di simmetria e quindi AH = HB = 1/2 di AB = 6.

b) è possibile utilizzare diversi strumenti parimenti validi (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione...), e l'alunno deve saper scegliere quello ritenuto migliore.

Ad esempio, per calcolare il costo di tre quaderni, l'alunno può effettuare l'addizione dei tre prezzi unitari (750 + 750 + 750 = 2250 oppure moltiplicare il prezzo unitario per tre (750 x 3 = 2250). Tutt'e due le operazioni portano al risultato esatto.

In casi analoghi, la scelta verte unicamente nell'individuare lo strumento più economico, più pratico, meglio rispondente alla particolare situazione, anche in riferimento alle abilità, alle preferenze, agli strumenti di calcolo di cui l'alunno dispone;

c) la soluzione del problema comporta la combinazione di due o più strumenti (addizione e moltiplicazione; sottrazione e divisione; addizione, moltiplicazione e divisione ...).

In questi casi, l'alunno deve innanzitutto saper individuare le singole operazioni, come negli esempi precedenti, e poi la loro successione (algoritmo). A prescindere dall'individuazione deIle singole operazioni necessarie, si può verificare che la loro successione abbia o non abbia importanza.

Ad esempio, per calcolare la spesa relativa alla pittura di due stanze di 60 m^2 ciascuna, sapendo che la pittura di l m^2 costa 15000 €, non ha importanza se viene prima calcolato il costo relativo ad una sola stanza (**60 X 15 000 = 900 000**) e poi questo viene moltiplicato per due: **9.000.000 x 2 = 18.000.000**) oppure se vengono prima calcolati i m^2(**60 x 2 = 120**) e poi questi vengono moltiplicati per **15000** (**120 x 15.000 = l.800.000**):

I algoritmo: 60x15000x2= oppure **II algoritmo**: **60 X 2 x 15 000** =

Se però, anziché il numero dei m^2 fossero state date le misure relative alle pareti delle stanze **(lunghe 5 m, alte 3 m)**, evidentemente occorreva prima calcolare l'area delle singole pareti, poi quella di una stanza ed infine procedere come sopra:

5 x 3 = 15   15 x 4 = 60   60 x 15.000 x 2 = l 800 000

oppure

60 x 2 x 15 000 = l 800 000

per cui gli algoritmi completi sarebbero stati i seguenti:

I algoritmo: 5x3x4x15.000x2

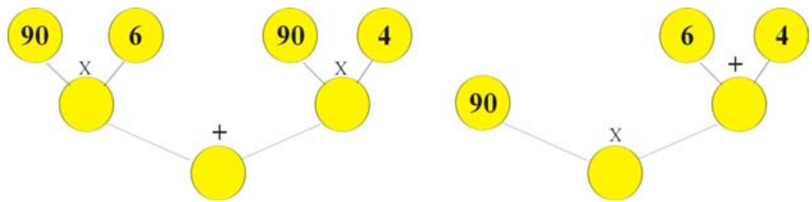
II algoritmo: 5x3x4x2x15.000

In simili casi ha importanza anche la successione delle operazioni. Pertanto, la formulazione delle ipotesi risolutive di una situazione problematica comporta sia l'individuazione delle singole operazioni da effettuare, sia la definizione della successione delle stesse (**algoritmo risolutivo**).

La definizione degli algoritmi risolutivi può essere effettuata a diversi livelli di rappresentazione, utilizzando diagrammi di Venn, grafi o diagrammi ad albero, macchine, frasi aperte, espressioni. ..

Come si afferma nei Programmi didattici del 1979 per la scuola media, *«grafi o diagrammi di flusso potranno essere utilizzati come un linguaggio espressivo per la schematizzazione di situazioni e per la guida alla soluzione di problemi».*

Ad esempio, dovendo risolvere il problema **"Quanto si spende per l'acquisto di 6 biglie per Maria e di 4 per Angela, ciascuna da 90 € "?**



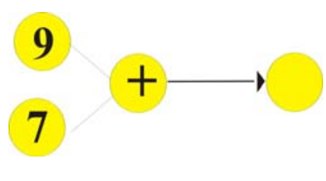
L'alunno può schematizzare la situazione utilizzando i **diagrammi ad albero:**

(90x6) + (90x4) = 90x(6+4)

In merito, si ritiene opportuno precisare che gli schemi sono diversi a seconda che si tratti di rappresentare una operazione o un operatore, come risulta dai seguenti esempi:

operazione

<<Maria ha 9 matite rosse e 7 blu. Quante matite in tutto ?>>



(vi sono due entrate ed una uscita)

Contemporaneamente o successivamente all'utilizzazione di tali schemi, gli alunni possono d**escrivere verbalmente il procedimento risolutivo:**

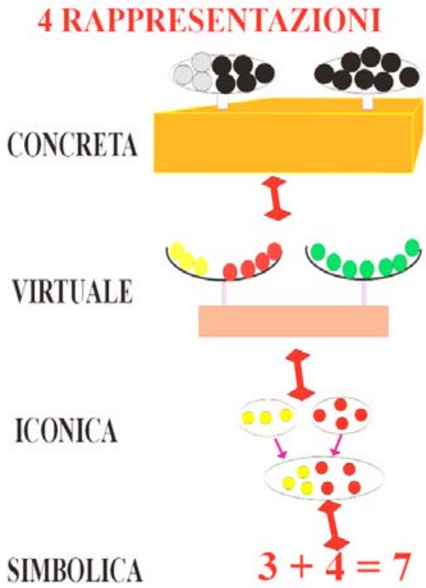
- **calcolo il costo delle biglie di Maria moltiplicando 90 x 6**
- **calcolo il costo delle biglie di Angela moltiplicando 90 x 4**
- **sommo i due costi**

Come si può rilevare dai diagrammi di Venn si può pervenire all'uso delle parentesi (espressioni), le quali, seppure ad un livello più avanzato di formalizzazione, costituiscono un ottimo strumento di rappresentazione degli algoritmi risolutivi di problemi.

In tale prospettiva occorre superare gli stereotipi di una certa prassi didattica che pretenderebbe sin dall'inizio una rappresentazione matematica formalizzata dei procedimenti di soluzione dei problemi. Non solo la formalizzazione costituisce un obiettivo da perseguire gradualmente, ma ciò che primariamente importa, soprattutto a livello di scuola elementare, è l'impegno, l'attività, il processo di soluzione dei problemi, e questo può essere realizzato utilizzando gli strumenti e le rappresentazioni più diversi[41].

In merito alla definizione degli algoritmi risolutivi, pur tenendo presente l'esigenza di muovere dall'azione concreta e di accompagnarla con la descrizione verbale, per poi passare alle rappresentazioni virtuali, iconiche e simboliche, in effetti è difficile stabilire un ordine preciso di successione di tali forme di rappresentazione, in quanto si tratta di un processo non lineare che comprende anche eventuali salti di alcune fasi, oltre a possibili ritorni a fasi precedenti, per cui potrebbe essere così rappresentato:

l . azione reale
2. azione virtuale
3. rappresentazione iconica
4. rappresentazione simbolica



Comunque, ai fini del1a definizione delle ipotesi di soluzione, risulta utile anche la realizzazione di un clima favorevole all'attivazione del ***pensiero divergente***, <<*suscitando nel fanciullo il gusto di un impegno dinamico nel quale si esprime tutta la sua personalità*»[42]. La formulazione delle ipotesi deve attivare non solo le capacità logiche, ma anche l'immaginazione, la fantasia, l'intuizione. Gli alunni debbono essere messi in condizione di rappresentarsi mentalmente gli schemi risolutivi, di costruirli attraverso la loro immaginazione creatrice, di intuirli, penetrando nelle situazioni problematiche con tutte le loro facoltà.”Con la mano destra",. ma anche con la “mano sinistra", cioè sia con processi razionali che con processi irrazionali.

Tra l'altro, giova pure la consapevolezza che anche l'errore è consentito[43], anzi che esso costituisce aspetto della ricerca scientifica, della quale strumento è proprio il processo di "falsificazione”[44]. Lo scienziato non si propone certamente di sbagliare, ma non teme gli errori: formulate le sue ipotesi, egli non cerca conferme, ma smentite.

TROVARE LA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA

Una volta messo a punto l'algoritmo, si passa alla sua esecuzione. Quest'attivita, alla quale qualche volta viene attribuita eccessiva importanza, costitcisce invece un aspetto non fondamentale della risoluzione dei problemi, e può essere effettuata anche utilizzando opportuni <<strumenti di calcolo e di elaborazione delle informazioni».

A meno che non sia espressamente previsto, la risoluzione dei problemi non costituisce un'attività finalizzata all'acquisizione degli automatismi di calcolo. Anche in tale prospettiva è perciò opportuno che i dati numerici dei problemi non siano complicati, in modo che gli alunni possano operare con essi a livello mentale (cfr. in merito l'importanza data dai PD85 al «*calcolo mentale*»).

Di conseguenza, è preferibile che gli alunni predispongano gli algoritmi risolutivi di un maggior numero di problemi, eseguendo le relative operazioni con la calcolatrice, anziché "perder tempo" nell'esecuzione di operazioni complicate la cui rilevanza ai fini formativi è molto scarsa, mentre, soprattutto quando comportano l'impiego di grossi numeri, possono rendere difficile la comprensione della situazione problematica da parte del fanciullo, come ha rilevato il Mialaret, il quale scrive che «*si ha l'impressione che i numeri grandi gli facciano paura e che egli perda la relativa sicurezza che invece ha quando si tratta di numeri relativamente piccoli*»[45].

VERIFICARE E INTERPRETARE CORRETTAMENTE I RISULTATI

Se la formulazione delle ipotesi costituisce un momento fondamentale nel processo di soluzione di un problema, altrettanto può dirsi della verifica dei risultati: la prima costituisce un momento più creativo che fa

---

[41] SPERANZA F ET ALII, *Insegnare matematica nella scuola elementare* Zanichelli, Bologna, 1986.
[42] D.P.R. 12 febbraio 1985, n. 104.
[43] BALDINI M, , *Epistemologia e pedagogia dell'errore*, La Scuola, Brescia, 1986; BORASI R, *Sbagliando si impara*, in “L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE”, Paterno del Grappa, 1988, IV.
[44]In merito cfr.: POPPER K.; *Logica della scoperta scientifica*, Einaudi, Torino, 1970; ***FALSIFICABILITÀ***, in http://it.wikipedia.org/wiki/Falsificabilit%C3%A0
[45] MIALARET G., *Op. cit.*, p. 109..

leva soprattutto sull'immaginazione e sulla fantasia, anche se implica pure la capacità razionale di progettazione dell'algoritmo; la seconda invece fa affidamento esclusivamente sulla razionalità, in quanto prevede il controllo della correttezza sia dell'algoritmo che della sua esecuzione.

L'assenza di riflessione critica sui risultati dei processi di risoluzione di problemi viene definita una "patologia" dal Boero[46].

La verifica si concretizza nell'accertare se i risultati sono **pertinenti al quesito, compatibili con esso, esatti.**

La verifica dei risultati ottenuti nella soluzione di un problema impegna i poteri logici degli alunni, perché essi debbono saper cogliere le relazioni esistenti tra i dati di partenza ed i risultati ottenuti.

In effetti, l'interpretazione dei risultati, la quale va effettuata tenendo presente l'obiettivo del problema, consente di verificare innanzitutto che il risultato costituisce una risposta adeguata al quesito, nel senso che consente di conoscere quanto in quello veniva richiesto.

Se la soluzione del problema ***"Quanto costano 120 kg di mele pagate a 900 € al kg"*** dà come risultato **10.800**, evidentemente occorre attribuire a questo numero il significato di **10800 €** e non di **10800 kg.**

Allo stesso modo, moltiplicando la misura della base per quella della larghezza di un rettangolo, espresse rispettivamente in **27 m** ed in **8 m**, l'alunno deve essere in grado di comprendere che si ottengono **216 m^2** e non **216 m**, perché l'algoritmo utilizzato si riferisce al calcolo della misura dell'area e non a quella del perimetro.

«***Interpretare correttamente i risultati***» significa però anche accertare se essi hanno un **significato accettabile**.

Ad esempio, nel problema delle auto da posteggiare nel viale, ove questo fosse lungo **34 m**, la divisione **34:5** darebbe come risultato **6,8** che, riferito ad auto, non è accettabile, perché non si può correttamente pensare a **6,8 auto**.

Tuttavia, anche nel caso del risultato esatto **30:5 = 6** ovvero **60:5 = 12**, occorre interpretare opportunamente il significato delle situazioni. Se le auto fossero tutte lunghe esattamente **5 m**, il posteggio sarebbe possibile solo attraverso precise manovre di accodamento.

In questo senso, l'interpretazione dei risultati di un problema costituisce un'operazione impegnativa che valorizza le capacità logiche degli alunni, ma anche il loro buon senso, la loro capacità di interpretare realisticamente le situazioni. Perciò, così come per la formulazione delle ipotesi di soluzione e forse ancora di più, risulta opportuno che tale verifica venga effettuata prevalentemente attraverso il lavoro di gruppo.

Inoltre, la verifica dei risultati deve riguardare anche il controllo della correttezza dell'esecuzione delle operazioni previste dall'algoritmo.

Ad esempio:

- se l'esecuzione della divisione **30:5** non fosse corretta e desse come quoziente **4** anziché **6**, il risultato, pur essendo pertinente al quesito, non sarebbe affatto corretto;
- il risultato **"12 auto"** costituisce una risposta adeguata al quesito ***"Quante auto possono essere posteggiate sui due lati del viale?".*** Nel caso invece che l'alunno avesse calcolato solo il numero delle auto posteggiate su un lato del viale, avrebbe ottenuto un risultato pertinente ma non adeguato;
- se nel calcolare **"*Quale parte di una torta di 3 kg va a ciascuno dei 12 invitati*"**, l'alunno, nell'effettuare la divisione **3:12** dimentica di porre la virgola al quoziente ed ottiene così **25** anziché **0,25**, egli deve essere in grado di comprendere che tale risultato non può essere interpretato come **25 kg**, ma evidentemente come **25 dag** (**250 g** ovvero **0,250 kg**).

A tal fine, è opportuno che la verifica dei risultati delle operazioni sia effettuata attentamente anche utilizzando opportuni strumenti automatici di calcolo. Le calcolatrici elettroniche ed i PC possono trovare un utile impiego anche nel controllo dei risultati delle operazioni aritmetiche effettuate nella soluzione di un problema, liberando così gli insegnanti di un lavoro di correzione meccanico e scarsamente produttivo.

È scontato poi che la verifica dei risultati costituisce un feedback che può portare ad una revisione degli algoritmi, ad una migliore formulazione dell'enunciato e quindi dello stesso quesito.

In effetti, a prescindere dal controllo dell'esattezza dei calcoli e della pertinenza dei risultati, la verifica rimette in discussione la formulazione delle ipotesi risolutive (algoritmi). Pertanto, come si è già evidenziato, solo astrattamente la verifica e la formulazione delle ipotesi vengono tenute separate, ma praticamente sono interconnesse, per cui si passa continuamente dall'una all'altra: formulata un'ipotesi, viene sottoposta a verifica e, in base al risultato di questa, si modifica l'ipotesi o se ne elabora una nuova. Tale processo può essere così rappresentato:

IPOTESI ↔ VERIFICA

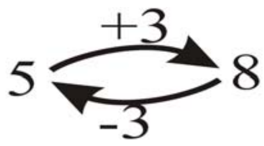
---

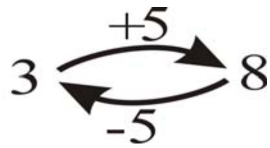
[46] " P. BOERO, *Op. cit.,* p. 60.

ATTRIBUIRE UN SIGNIFICATO A RAPPRESENTAZIONI MATEMATICHE DATE

Si è sottolineato che caratteristica del pensiero è la **reversibilità**, cioè la possibilità di effettuare un'operazione e la sua inversa.

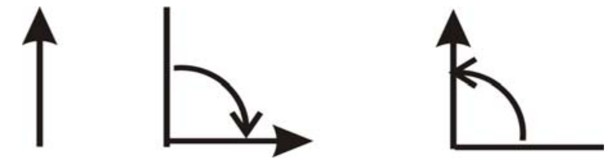
Mentre l'azione concreta non può essere annullata ─ un vetro suddiviso in 6 parti non può essere ricomposto ─, l'operazione mentale invece consente di ritornare indietro, di annullare l'operazione già eseguita, di considerarla come non fatta. In questo consiste essenzialmente la superiorità del pensiero sull'azione: si può agire una sola volta, ma si possono fare mille pensieri.





Per coltivare questa capacità del pensiero, è opportuno che ogni operazione sia quanto più possibile accompagnata dalla sua inversa: l'addizione **5 + 3 = 8** si trasforma, non solo nell'addizione **3 + 5 = 8**, ma anche nell'operazione inversa **8 - 3 = 5** ovvero **8 - 5 = 3**:

─la rotazione di 90° a destra viene annullata dalla rotazione di 90° a sinistra:

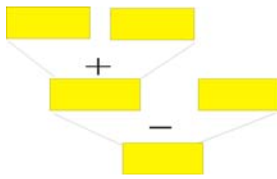


Allo stesso modo, nell'esecuzione di un problema, è opportuno andare dalle situazioni problematiche alla elaborazione degli algoritmi e da questi a quelle:

situazioni problematiche ↔ algoritmi

È ovvio che si debbono guidare gli alunni ad effettuare tali passaggi sin dal primo approccio ad ogni concetto od operazione matematica.

In merito si deve tenere presente che, anche se non rappresenta un aspetto costitutivo della soluzione dei problemi, tuttavia, ai fini formativi, assume particolare importanza anche la riflessione sulle strategie e sugli algoritmi utilizzati nella risoluzione dei problemi (***atteggiamento metacognitivo***).



La risoluzione dei problemi non è fine a se stessa, ma deve soprattutto servire a imparare come si risolvono i problemi ed a sviluppare i poteri mentali. Come afferma il Boero, ***«la capacità di risolvere problemi aritmetici si sviluppa a poco a poco attraverso l'assimilazione di elementi "procedurali" che costituiscono premesse mnemoniche sempre più ricche ed estese per ragionamenti via via più avanzati e complessi»***[47].

A tal fine, può risultare particolarmente opportuno utilizzare gli stessi algoritmi per risolvere problemi analoghi, lasciando immodificato l'algoritmo e variando solo alcuni elementi dei problemi.

L'operazione **40:4 = 1O** che rappresenta l'algoritmo risolutivo del problema del posteggio delle auto nel viale potrebbe essere riferita alla sistemazione di bancarelle, anziché di auto:

"Quante bancarelle lunghe 4 metri possono essere sistemate nel giorno di fiera sui due lati del viale antistante la scuola?".

Potrebbe ancora essere riferita alla sistemazione di cartelloni pubblicitari o elettorali:

"Quanti cartelloni pubblicitari larghi 4 metri (o elettorali) possono essere sistemati sui due lati del viale antistante la scuola?".

Inoltre, la stessa operazione **40:4 = lO** può essere utilizzata come strumento di soluzione di altre situazioni problematiche materialmente diverse ma matematicamente analoghe:

- "40 disegni vengono sistemati in 4 cartelle, quanti disegni in ogni cartella?";

- "In quanti viaggi una barca a 4 posti traghetta da una riva all'altra del lago 40 turisti?"

Ancora, lo schema risolutivo del problema ***"Maria doveva piantare lO bulbi, ne ha ancora 3 in mano, quanti ne ha piantati?":***

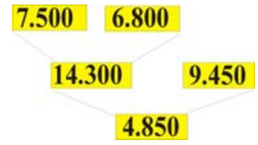
può essere utilizzato per risolvere il problema ***' 'Dopo averne regalate alcune alle amiche, ad Angela sono rimaste solo 3 delle sue lO caramelle. Quante ne ha ragalate?"***

[47] BOERO P., Op. cit., p. 64.

Tuttavia, gradualmente gli schemi risolutivi possono essere generalizzati, impegnando gli alunni nella risoluzione di problemi che richiedono lo stesso algoritmo risolutivo, ma che si presentano con situazioni e dati numerici diversi.

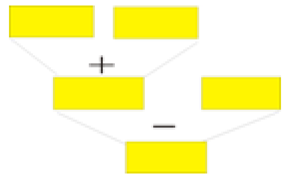
A tal fine, più che la predisposizione da parte degli insegnanti di serie di problemi, risulta più produttiva la costruzione da parte degli stessi alunni.

Dal problema ***"Con i 7.500 e 6.800 € avuti dalla mamma, Maria ha comprato un libro che costa 9450 €. Quanto le è rimasto?"***, risolto con le operazioni (7500 + 6800) ─ 9.450 = 4.850 - può essere ricavato lo schema risolutivo **(a + b) - c**, così rappresentabile con un diagramma:



Questo diagramma può essere utilizzato per risolvere problemi analoghi, del tipo:
"Enzo ha percorso 460 km delle due tappe di 375 e 280 km del suo viaggio. Quanti km deve ancora percorrere?"

(375 + 280) →755 (755 ─ 460) → 295 km



Allo stesso modo, possono essere costruiti altri diagrammi da utilizzare nelle opportune situazioni.

Da tali attività gli alunni possono pervenire, procedendo con opportuna gradualità, ad utilizzare algoritmi non desunti dalla soluzione di un problema ma costruiti ex novo, cioè ad ***«attribuire un significato a rappresentazioni matematiche date».***

Ad esempio, possono chiedersi quali situazioni problematiche possono essere risolte con la sottrazione **7 ─ 4**:

- ***"Avevo 7 caramelle, ora ne ho 4; quante ne ho mangiate?"***
- ***"Ho effettuato 4 delle 7 addizioni assegnatemi. Quante ne debbo fare ancora?"***
- ***"Maria ha 7 anni, Angela 4. Quanti anni in meno ha Angela? Quanti anni in più ha Maria?"***

Gradualmente si possono proporre algoritmi con più di una operazione: **(7 x 3) ─ 8; (50 ─ 14) : 9 ...**

Successivamente si può pervenire a proporre algoritmi costituiti dall'indicazione delle operazioni senza dati numerici, e cioè:

- **frasi aperte: 7 + ... = ... ; ... - 5 = ... ; ... x 4 = 28; ... + ... = ... ; ecc.**
- **espressioni numeriche: (... + ...) x ... = ... ; (... - ...) + (... x ...) = .. ; ecc.**
- **diagrammi:**
- **macchine**:

Per tali algoritmi gli alunni possono inventare i problemi più diversi, facendo appello alle loro esperienze, alla loro capacità di osservazione, di riflessione e di analisi delle situazioni concrete, alla loro immaginazione, alla loro fantasia, che così vengono consistentemente impegnate e quindi sviluppate.

Se così impostata, la soluzione di problemi, nei suoi vari momenti, «***contribuisce alla formazione del pensiero***».

CONTENUTI ED ITINERARI METODOLOGICI RELATIVI ALL'OBIETTIVO

P.3. Risolvere problemi aventi procedimento e soluzione unici e problemi che offrono possibilità di risposte diverse, ma egualmente accettabili.

Questo obiettivo tende a far sì che gli alunni prendano consapevolezza che vi sono:

- **problemi che non possono essere risolti in assoluto o con gli strumenti di cui si è in possesso;**
- **problemi che possono essere risolti con procedimenti diversi e portano a risultati unici o diversi;**
- **problemi che ammettono un solo procedimento ed un solo risultato.**

Perché acquistino tali consapevolezze, è opportuno che sin dal primo approccio gli alunni si trovino ad affrontare, non singole classi di problemi, ma le più diverse situazioni problematiche, così come esse si ritrovano nella complessa realtà che li circonda.

Se l'educazione matematica deve tendere a ***«sviluppare, in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire consapevolmente su di essa»,*** allora gli alunni non debbono essere impegnati ad operare in un ambiente artefatto, astratto, semplificato, qual è quello dei libri di testo, delle guide didattiche ecc., ma nella concretezza della realtà, in ***«situazioni problematiche .crete, che scaturiscono da esperienze reali del fanciullo».***

Solo partendo da queste situazioni complesse, essi gradualmente acquistano consapevolezza che vi sono diversi tipi di problemi.

Problemi che non possono essere risolti in assoluto o con gli strumenti di cui si è in possesso

Innanzitutto, gli alunni imparano che vi sono **problemi che essi riescono a risolvere**, e ciò accresce la **fiducia in se stessi**, la propria autostima (<<*sicurezze ... sul piano affettivo, psicologico, sociale*»), e **problemi che essi non riescono a risolvere**, e ciò fa prendere ***«consapevolezza delle proprie possibilità»***, cioè di quelle che sono le loro effettive forze, capacità, conoscenze, e questo, se avviene contemraneamente alle esperienze di successo, positive, gratificanti, contribuisce a far uscire i fanciulli dal proprio egocentrismo e a far loro acquisire il senso della realtà e quindi anche dei propri limiti, cioè ***<<consapevolezza di sé».***

Forse nessuna esperienza scolastica come quella di soluzione dei problemi assume così rilevante significato, non solo sul piano culturale, ma anche sul piano educativo in prospettiva morale, sociale, affettiva ecc.

In fondo, la vita è costituita da problemi ed affrontare problemi significa sostanzialmente imparare a vivere, in tutti i sensi.

Sul piano metodologico, l'alunno che non riesce a risolvere determinati problemi non deve essere indotto a ritenere che essi non siano tutti risolvibili in assoluto, ma che alcuni di essi non sono effettivamente risolvibili e che altri invece non sono risolvibili con gli strumenti di cui egli è attualmente in possesso, per cui, acquisendo nuove conoscenze e sviluppando le sue capacità, nel futuro egli potrà essere in condizione di risolverli.

In tale prospettiva, può risultare particolarmente utile un primo approccio alla storia del pensiero matematico e del pensiero umano in genere.

Le consapevolezze che così gli alunni acquistano possono peraltro contribuire a far nascere in essi anche utili motivazioni allo studio della matematica ed a farli entrare nello spirito dell'affascinante "avventura" del pensiero matematico, con un impegno pari alle loro forze ma non per questo meno significativo di quello che spinge il matematico e lo scienziato a nuove conquiste, alle frontiere della conoscenza umana.

Il fanciullo ripercorre il cammino dell'umanità, e le sue "frontiere" sono quelle dell'uomo primitivo, dell' Assiro, del Babilonese, dell'Egiziano, e non ancora quelle di Euclide. Ma ciò che importa è che egli sia coinvolto in questa «avventura», che la senta, che la viva, con gioia, anche se con fatica, come accade per i suoi giochi più impegnativi e più belli.

In tal senso, i problemi che non riesce a risolvere non vengono rifiutati, ma vanno a costituire il fronte che assilla e rende inquieta la sua vita, ponendosi come una sfida che un giorno sarà affrontata e vinta, dall'alunno o dal matematico del futuro.

Tuttavia, è anche opportuno che l'alunno prenda consapevolezza che non esiste un confine netto tra problemi che riesce a risolvere e problemi che non riesce a risolvere. Anche se vi sono problemi che l'alunno del primo ciclo non può affrontare con strumenti matematici formali, tuttavia egli deve essere stimolato e guidato a sperimentare le più diverse strategie di approccio alla loro soluzione.

Ad esempio, se egli non sa calcolare la circonferenza del cerchio o l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cui conosce le misure dei cateti, è però capace di effettuarne la misurazione su un modello concreto o disegnato.

Allo stesso modo, anche se ancora non è padrone del calcolo frazionario, egli riesce parimenti a ripartire equamente un certo numero di biglie colorate tra due o più compagni.

Come afferma il Bruner, riprendendo il discorso del Comenio, tutto può essere insegnato a tutti, utilizzando la forma di presentazione adeguata alle modalità di apprendimento delle diverse età.

In questo senso, l'avvio alla soluzione dei problemi può avvenire a diversi livelli, e non solo con gli strumenti matematici più avanzati. D'altra parte, ciò avviene sempre nella soluzione dei problemi: ad esempio, anche gli alunni del secondo ciclo, non sapendo utilizzare le equazioni, fanno ricorso a più complesse strategie empiriche.

Problemi che possono essere risolti con procedimenti diversi e che portano a risultati unici o diversi

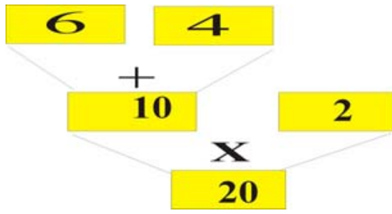
È opportuno che sin dall'inizio gli alunni acquisiscano la consapevolezza che i problemi possono essere risolti quasi sempre con diversi procedimenti (algoritmi). In questo modo si evita che in essi si formi il pregiudizio comune che occorre andare alla ricerca della soluzione, e non invece di una delle tante soluzioni.

Così come non esiste un solo modo di cantare, di dipingere, di danzare, di descrivere, di manifestare la tristezza, allo stesso modo vi sono strategie diverse per calcolare il perimetro del rettangolo, per classificare bottoni ecc.

Ad esempio, per calcolare il perimetro del rettangolo lungo 6 m e alto 3 m, si possono **sommare le misure dei quattro lati: 6 + 4 + 6 + 4 = 20;**

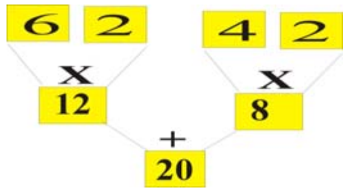
Oppure si può:

• **addizionare le misure della lunghezza e dell'altezza e poi raddoppiare: (6 + 4 = 10) X 2 = 20**



ovvero

•**raddoppiare le misure della lunghezza e della larghezza e poi sommare:**



L'individuazione di queste diverse procedure, che gli alunni debbono inventare, scoprire, costruire, impegna l'intuizione, l'immaginazione, la fantasia, la capacità di progettazione ... dei singoli alunni, anche nel lavoro di gruppo (*cooperative learning*) e in tal senso si pone come un'attività che contribuisce alla formazione del pensiero, il quale è costituito appunto da processi attivi, esplorativi, operativi, e non invece di abitudini, di atti meccanici, come è quello di applicare pedissequamente una data formula, quasi un riflesso condizionato: lo stimolo "**perimetro del rettangolo**" attiva la formula **(a + b) x 2**.

Occorre perciò favorire il pensiero divergente, la creatività, i poteri produttivi dei singoli alunni, valorizzando non tanto il risultato quanto i processi risolutivi.

Ciò che importa è l'attivazione del pensiero, i processi mentali che entrano in funzione, le strategie utilizzate, indipendentemente dai risultati che vengono conseguiti.

Questi ultimi sono diversi da individuo ad individuo, e gli insegnanti sono chiamati a prenderne consapevolezza (<<*accertare ... quali strategie risolutive utilizza*»), non come punto di partenza di un intervento didattico di omologazione, ma come patrimonio di risorse da valorizzare, come potenziale umano da coltivare (<<*conoscere e valorizzare le attitudini individuali*»).

Ciò non significa che i diversi procedimenti si equivalgano. Anche se portano agli stessi risultati, gli algoritmi si differenziano per il loro valore in termini pratici, economici ed anche estetici. Un algoritmo può risultare più pratico, anche in riferimento agli strumenti di calcolo che è possibile utilizzare, ma meno accettabile di un altro anche sul piano estetico che è pure opportuno tener presente. La categoria del bello appartiene di diritto anche alla matematica, la quale, come affermavano i Pitagorici, assicura l'armonia dell'universo (per la sua: bellezza denominato appunto *cosmo*).

Problemi che possono essere risolti con procedimenti diversi e che portano a risultati diversi

Oltre ai problemi che possono essere risolti con procedimenti diversi ma che portano a risultati eguali, esistono problemi che ammettono non solo procedimenti risolutivi ma anche risultati diversi.

Ad esempio, il problema "***Con quante monete da 5 € e da lO € si può formare la somma di 25 € ?"*** può essere affrontato con procedure diverse e può portare a risultati diversi.

A livello concreto, si possono avere:

I ALGORITMO: 5€ + 5€ + 5€ + 5€ + 5€ = 25€
II ALGORITMO: 5€ + 5€ + 5€ + 10€ = 25€
III ALGORITMO; 5€ + 10€ + 10€ = 25€

Anche questi problemi rivestono notevole importanza perché non si fondano sull'applicazione meccanica di una formula o di una procedura, ma fanno leva sul ragionamento, sull'intuizione, sulla creatività dei fanciulli e pertanto contribuiscono a formare il pensiero.

<u>**Problemi che ammettono un solo procedimento ed un solo risultato**</u>

Anche se normalmente esistono diverse modalità di soluzione per ogni problema, tuttavia non è da escludere che alcuni problemi possano ammettere un solo procedimento risolutivo e quindi un solo risultato; essi non costituiscono la regola, ma l'eccezione, diversamente da quanto si ritiene in una certa prassi didattica, nella quale alcune volte anche la correzione dei problemi avviene con una scheda di controllo!

In effetti, pure un semplice problema, del tipo ***"Stefania ha effettuato 7 addizioni e 5 sottrazioni. Quante operazioni in tutto?"*** , anche se ammette una sola risposta, può essere risolto con diverse procedure:

7+5=12; 5+7=12; 7+1+1+1+1+1= 12; 5+1+1+1+1+1+1+1= 12

(Sono possibili anche altre soluzioni: **7 — 1 = 6; 5 + 1= 6; 6 x 2 = 12 ...).**

CONTENUTI ED ITINERARI METODOLOGICI RELATIVI ALL'OBIETTIVO

P4 — Individuare la carenza di dati essenziali per la risoluzione di problemi ed eventualmente integrarli; riconoscere in un problema la presenza di dati sovrabbondanti, oppure contraddittori con conseguente impossibilità di risolverlo.

Individuare la carenza di dati essenziali per la problemi ed eventualmente integrarli; riconoscere in un problema la presenza di dati sovrabbondanti, oppure contraddittori con conseguente impossibilità di risolverlo.

La matematica è una scienza ipotetico-deduttiva, un discorso tautologico, che esplicita quanto già contenuto negli assiomi (Oggi si chiamano ***ipotesi***) In tal senso, anche il procedimento di soluzione di un problema non aggiunge nulla a quanto è detto nell'enunciato: il risultato è già contenuto nei dati; le operazioni che vengono effettuate servono solo a rendere esplicita la risposta al quesito.

Ad esempio, la risposta al problema **"Quanto costano 9 quaderni da 30€?"** è già implicitamente contenuta nei dati ciatti (**9 quaderni**; **30€"**).

Lo stesso discorso vale per qualsiasi altro problema geometrico, logico, statistico ecc.

Perciò, risolvere un problema non significa ricercarne la soluzione al di fuori di esso ma esplicitarla dai suoi dati: la risoluzione di un problema matematico va effettuata solo sulla base dei dati contenuti nell'enunciato, dati che non possono essere modificati o non tenuti presenti, come avviene ad esempio in un esperimento scientifico, nel quale si procede a modificare le variabili, per ottenere il risultato desiderato.

Questo fatto deve essere didatticamente evidenziato, perché gli alunni imparino a rispettare le informazioni, le condizioni, le situazioni definite nell'enunciato.

Queste non possono essere modificate: se si modificano, si ha un altro Problema. Il problema "***Pago un conto di 170000€ con i 150000€ che ho in tasca"*** diventa un problema risolubile se modifico in **250000€** i **150000€,** ma questa è un'altra situazione problematica, è un altro problema.

Tale presa di consapevolezza e soprattutto la maturazione del corrispondente atteggiamento assumono notevole significato, in quanto contribuiscono ad una formazione razionale che ha rilevanza sia sul piano intellettuale che sul piano pratico (<<**coereuza tra l'ideale assunto e la sua realizzazione**»).

Educare gli alunni a risolvere problemi assume pertanto un significato molto più ampio dell'esecuzione di una semplice catena di operazioni effettuata in base ad una più o meno chiara intuizione globale. Significa innanzitutto determinare i dati, individuarli o ricercarli. In effetti, l'alunno deve essere guidato, da una parte, a prendere consapevolezza di quali dati sono **indispensabili**, perché senza di essi non si può effettuare la ricerca del risultato richiesto dal quesito, e, dall'altra, a individuare i dati che sono già chiaramente indicati, desumibili o impliciti, nel senso che vengono dati per conosciuti o rintracciabili.

Una volta che il problema sia stato ben compreso, attraverso l'analisi dell'enunciato e la sua eventuale traduzione in linguaggio matematico, la prima operazione da effettuare consiste nel determinare quali dati siano **indispensabili** per la sua soluzione.

Quest'attività si collega strettamente, non solo all'analisi della situazione problematica o dell'enunciato, ma anche alla formulazione di ipotesi di soluzione, perché la necessità dei dati emerge solo nel momento in cui si intuiscono gli algoritmi risolutivi.

In merito, è opportuno ribadire che in effetti tutte le operazioni di soluzione di un problema sono interconnesse e solo astrattamente è possibile separarle, per cui ci si trova sempre dinanzi ad una situazione fluida, che viene continuamente rimessa in discussione. I dati che in un primo momento sembravano indispensabili possono poi risultare irrilevanti e viceversa, in un secondo momento, si può avvera necessità di altri dati.

Comunque, in linea di massima, l'alunno può provvisoriamente ritenere necessari alcuni dati ed impegnarsi quindi a stabilire se essi sono o meno presenti nell'enunciato o nella situazione problematica.

In pratica, si può verificare che i dati siano:

- ***chiaramente indicati*** *nell'enunciato;*
- ***impliciti****, in quanto, o già conosciuti, o desumibili dal contesto dell'enunciato, o rintracciabili altrove;*
- ***carenti****, in quanto in nessun modo risulta possibile venirne a conoscenza;*
- ***sovrabbondanti****, in quanto nell'enunciato ve ne sono più di quanti ne sono necessari per la soluzione del problema;*
- ***contraddittori*** *tra di loro.*

È opportuno, almeno all'inizio, che la ricerca dei dati muova quanto più frequentemente possibile da effettive situazioni problematiche non ben definite ovvero anche da enunciati che non offrano sempre tutti e solo i dati necessari.

Così come nelle situazioni problematiche concrete occorre andare alla ricerca dei dati necessari, individuandoli nella selva dei numerosi dati della situazione stessa, allo stesso modo, gli enunciati debbono essere formulati in modo che alcuni dati, o manchino, o siano impliciti, o siano sovrabbondanti, o contraddittori.

Problemi con dati chiaramente indicati

Nella comune prassi didattica vengono quasi sempre proposti enunciati nei quali sono chiaramente indicati unicamente i dati necessari alla soluzione del problema, per cui in effetti gli alunni debbono soltanto stabilire quali sono le operazioni da effettuare.

In questo modo gli alunni sono posti dinanzi a situazioni astratte, semplificate, lontane dalle loro «*esperienze reali*», che possono risultare, non solo scarsamente motivanti, ma anche poco capaci di contribuire a ***<<formare le abilità necessarie per interpretare criticamente (la realtà) e per intervenire consapevolmente su di essa>>***.

Problemi con dati impliciti

I dati di un problema sono impliciti, quando, pur non essendo chiaramente indicati, possono essere facilmente individuati o già conosciuti, o determinabili dal contesto dell'enunciato, o rintracciabili altrove.

Si è già evidenziata l'opportunità che gli enunciati, così come le situazioni problematiche concrete, non offrano sempre i dati necessari già chiaramente indicati. In effetti, la risoluzione deve cominciare già dalla individuazione e dalla ricerca dei dati.

Pertanto, si possono innanzitutto affrontare problemi con dati impliciti, in quanto già noti agli alunni.

Ad esempio, nel problema **"Calcolare il numero dei quaderni necessari per la nostra classe"** si presuppone che agli alunni siano già noti, non solo il numero degli alunni della scolaresca, ma anche il numero dei quaderni che costituiscono la dotazione di ciascun alunno.

Anziché già noti, i dati necessari possono anche essere facilmente rintracciabili.

Ad esempio, nel problema **"Calcola il peso di una palla di acciaio avente il raggio di 30 cm"** , il dato relativo al peso specifico dell'acciaio è implicito, perché non viene dato, pur essendo ben determinato, perchè può essere facilmente reperito in una tabella dei pesi specifici.

In una situazione problematica concreta, nella quale si desidera conoscere il numero dei tavoli da sistemare nel refettorio della scuola, i dati sono tutti impliciti, in quanto le misure sia dello spazio occupato dai tavoli sia del refettorio sono già definite. Ove invece, ad esempio, fosse possibile modificare le misure dei tavoli, non ci si troverebbe più dinanzi ad un problema matematico, ma ad un problema pratico risolvibile attraverso diversi problemi matematici, in quanto ad ogni variazione di dati corrisponderebbe un problema matematico.

I dati di un problema possono essere già noti oppure presupposti, impliciti, e come tali da esplicitare, individuare, trovare, rintracciare, ma debbono essere sempre già ben definiti, certi, non modificabili, e comunque sempre desumibili dal contesto problematico o dalle indicazioni dell' enunciato.

Problemi con dati carenti

La formulazione dell'obiettivo **P3** dei PD85 fa riferimento alla **«carenza di dati essenziali per la risoluzione di problemi»**.

Se con questa espressione si vuole far riferimento a dati impliciti, evidentemente è possibile «integrarli», come abbiamo finora evidenziato.

Ove invece si voglia far riferimento a enunciati i cui dati manchino in assoluto, nel senso che non siano in alcun modo già definiti, non si può evidentemente parlare di veri e propri problemi, ma di situazioni problematiche aperte, possibili, ipotetiche, in quanto, a seconda dei dati che verranno assunti ("integrati"), si avranno tanti problemi diversi, anche se analoghi.

Ad esempio, ove non siano già definite le misure dei tavoli o del refettorio, si possono formulare molteplici problemi, analoghi, ma diversi, in quanto, anche se tutti risolubili con l'algoritmo *"misura dell'area del refettorio: misura dell'area occupata da un tavolo*", il risultato, cioè il numero dei tavoli, varia in relazione al variare dei dati.

Per far acquisire agli alunni la capacità di riconoscere quali sono i dati necessari per la risoluzione di un problema, non v'è metodo migliore che impegnarli nella risoluzione di problemi i cui enunciati manchino di dati necessari. L'impossibilità di trovare la soluzione di una situazione problematica fa meglio percepire la rilevanza dei dati necessari.

Problemi con dati sovrabbondanti

Si è già evidenziata 1'opportunità che gli alunni muovano da situazioni problematiche reali, le quali ovviamente contengono molti più dati di quanti ne occorrano per risolvere il problema che interessa. In effetti, sono queste le situazioni problematiche più autentiche, perché legate alle situazioni concrete, reali, effettive, nelle quali si svolge la vita del fanciullo ed alla quale dovrebbe collegarsi —*«partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscono da esperienze reali del fanciullo»*—, l'educazione matematica intesa come formazione del pensiero e finalizzata a interpretare criticamente la realtà e ad intervenire consapevolmente su di essa.

In tale prospettiva è opportuno partire da situazioni problematiche nelle quali gli alunni debbono individuare da soli quali sono i dati necessari per la soluzione del problema posto ovvero anche da enunciati che offrano una molteplicità di dati, non tutti necessari per la soluzione del problema.

Ad esempio, nel problema **"Maria divide in parti eguali con Angela ed Enza le sue 12 biglie colorate, delle quali 7 sono rosse. Con quante biglie resta?",** mentre il numero delle parti da fare è implicito, ma facilmente desumibile dal contesto (Maria, Angela, Enza→3), viene invece offerto un dato non necessario (il numero delle biglie rosse).

Allo stesso modo, nel problema **"Calcolare l'area di un rettangolo lungo 40 e alto 30 metri, la cui diagonale misura 50 metri"** , la misura della diagonale costituisce un dato sovrabbondante.

Problemi con dati contraddittori

Nella ricca casistica degli enunciati realistici o verosimili è opportuno si ritrovino anche quelli con dati contraddittori, in modo da favorire lo sviluppo delle capacità razionali degli alunni, i quali non debbono mai assumere i dati acriticamente, ma debbono sempre sottoporli ad accurata analisi per verificarne la coerenza logica.

Ad esempio, nel problema **"In una classe di 15 alunni, 18 sono maschi. Quante sono le femmine?"**, il dato relativo al numero dei maschi è evidentemente contraddittorio con il numero degli alunni della classe che è inferiore.